

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
BŪVNICĪBAS FAKULTĀTE
BŪVNICĪBAS UN REKONSTRUKCIJAS INSTITŪTS
BŪVKONSTRUKCIJU KATEDRA

**KOKSNES MATERIĀLU UN PLASTMASU SPRIEGUMU
UN DEFORMĀCIJU APRĒĶINA PAMATI**

Metodiskie norādījumi

RTU
Rīga 2019

Metodiskajos norādījumos sniegtas ziņas par galvenajām koksnes uzbūves īpatnībām un, balstoties uz tām, skaidrotas galvenās mehāniskās īpašības. Parādīti deformāciju un spriegumu aprēķini koksnes un plastmasu materiāliem lineāri elastīgajā stadijā. Izklāstīti slāņainu kompozītmateriālu aprēķinu pamatprincipi.

Mācību līdzeklis paredzēts RTU Būvniecības specialitāšu studentiem bakalaura, inženiera, maģistra un doktora grāda iegūšanai. To var izmantot arī citu specialitāšu studenti, kā arī projektēšanas organizāciju inženiertehniskie darbinieki.

Pateicamies profesoram F.Bulavam par vērtīgiem ieteikumiem metodisko norādījumu izstrādāšanā.

Metodiskos norādījumus sastādīja Dr.Sc.Ing. Jānis Šliseris,

UDK 674.8+678.5.067](072)

Ko 178

ISBN 978-9934-10-088-8

Galvenie darbā izmantotie apzīmējumi

x, y, z	- konstrukcijas elementa galvenās koordinātu ass;
$1, 2, 3$	- ortotropa materiāla elastīgās simetrijas ass, koksnei: ass 1 šķiedru virzienā, ass 2 tangenciālajā virzienā, ass 3 radiālā virzienā; stiegrotu plastiku loksnēm: ass 1 stiegru virzienā, ass 2 perpendikulāri šķiedrām, loksnes plaknē, ass 3 perpendikulāri loksnes plaknei;
$a_{iklm}, a_{i'k'l'm'}$	- stiprības tenzora komponentes - elastīgās simetrijas asīs un patvaļīgā koordinātu sistēmā;
S_{iklm}, C_{iklm}	- elastīgo raksturlielumu komponentes, kas attiecīgi saista deformācijas ar spriegumiem un otrādi;
$S_{i'k'l'm'}, C_{i'k'l'm'}$	- elastīgo raksturlielumu komponentes, patvaļīgā koordinātu sistēmā;
E_i	- materiāla elastības modulis ass i virzienā;
G_{ij}	- materiāla bīdes modulis plaknē ij ;
ν_{ij}	- Puasona koeficients plaknē ij (raksturo šķērsdeformāciju virzienā i , ja pielikts spēks virzienā j);
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,$ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	- normālspriegumu un relatīvo deformāciju komponentes attiecīgo asu virzienos;
$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31},$ $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$	- tangenciālo spriegumu un bīdes deformāciju komponentes plaknēs, ko nosaka indeksi (piemēram, sprieguma komponente τ_{12} izraisa taisnā leņķa izmaiņu asīs 1 un 2, par lielumu γ_{12} , ko mēra radiānos);
$\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$	- spriegumu un deformāciju tenzoru komponentes;
$R_{1,t}, R_{2,t}, R_{3,t},$ $R_{1,c}, R_{2,c}, R_{3,c}$	- robežstiprība pie stiepes (indekss t) un spiedes (indekss c) materiāla elastīgās simetrijas asu virzienos;
$R_{12,t}^{(45)}, R_{23,t}^{(45)}, R_{31,t}^{(45)},$ $R_{12,c}^{(45)}, R_{23,c}^{(45)}, R_{31,c}^{(45)}$	- robežstiprība diagonālā virzienā (45° leņķi pret elastīgās simetrijas asīm, ko norāda indeksi) stiepē (indekss t) un spiedē (indekss c);
R_{12}, R_{23}, R_{31}	- robežstiprība pie tūrās bīdes plaknēs, ko norāda indeksi.

1. IEVADS

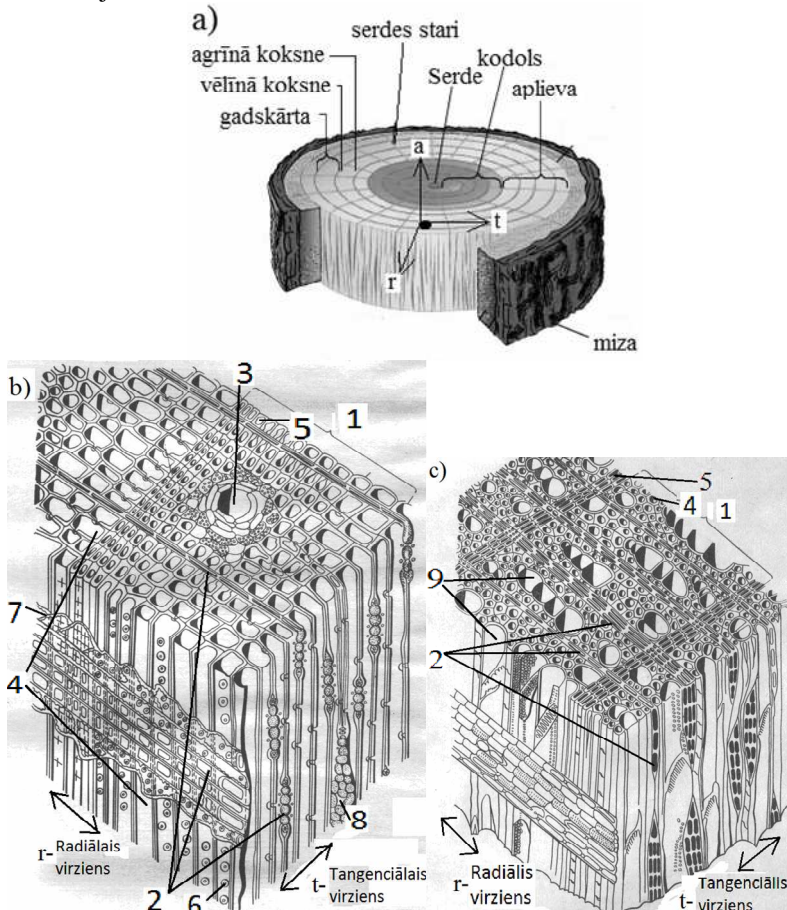
Koksne ir anizotrops, neviendabīgs dabīgo polimēru kompozīts, kas sastāv no virknes hierarhiski savstarpēji pakārtotiem struktūru līmeņiem. Izprotot koksnes uzbūvi var labāk saprast koksnes fizikāli-mehānisko īpašību anizotropiju. Lai izprastu kāpēc koksnes īpašības dažādos virzienos ir atšķirīgas, att.1. parādīta koksnes uzbūve šūnu līmenī un izejot no tās skaidrotas svarīgākās koksnes deformatīvās un stiprības īpašības, kā arī to raksturlielumu aprēķina modeļi. Tā kā tiek uzskatīts, ka koksne ir sarežģītākais no zināmajiem kompozītmateriāliem, tad plastmasu uzbūve detalizēti netiek aplūkota, jo no materiālzinātnes viedokļa to struktūra ir vienkāršāka, bet mehānisko īpašību raksturotājlielumu aprēķina modeļi neatšķiras no tiem ko lieto koksnes materiāliem.

2. KOKSNES UZBŪVE UN TĀS STRUKTŪRAS IZMAIŅAS SLODZES IEDARBĪBĀ

2.1 Koksnes uzbūves pamati

Lielu daļu no koksnes tilpuma aizņem tukšumi, blīvākām koksnēm to ir mazāk un pētījumi dažādās pasaules laboratorijās rāda, ka neatkarīgi no koksnes sugas, šūnu sieniņu materiāla tilpummasa ir 1.53 g/cm^3 . Skuju koku koksnes struktūru veido tās garenvirzienā vērstas traheīdas (šūnu sieniņas) (skat. 1. attēlu). Traheīdu virziens tiek saukts par koksnes aksiālo virzienu, jeb šķiedru virzienu. Izšķir arī tangenciālo virzienu, kas vērst pa gadskārtu pieskari un radiālo virzienu. Traheīdas pa koksnes stumbra šķērsgriezumu visās vietās nav ar vienādām īpašībām. Tādēļ stumbra šķērsgriezumu sadala vairākās zonās- serde, kodols, aplieva (skat. 1.a attēlu). Pa vidu stumbram ir serde, apkārt tai kodols, kur traheīdas ir ar augstākām mehāniskajām īpašībām salīdzinot ar traheīdām aplievas zonā. Šīs traheīdas nosacīti var uzskatīt par taisnstūra formas caurulēm, kas cieši sasaistītas kopā ar starpšūnu vielu (skat. 2. attēlu). Traheīdu sieniņu uzbūve, forma un izmēri ir tas, kas, galvenokārt, nosaka koksnes fizikāli mehāniskās īpašības, dažādām koku sugām tās ir atšķirīgas. Kokam augot, koksne veidojas no riņķveida gadskārtām, kuras sastāv no agrīnās un vēlīnās koksnes. Agrīnajā koksnē traheīdas ir ievērojami lielākas, vājākas, bet vēlīnajā mazākas, blīvākas un izturīgākas (skat. 1. attēlu). Ar to var

izskaidrot agrīnās koksnes salīdzinoši zemās mehāniskās īpašības salīdzinājumā ar vēlno koksni.

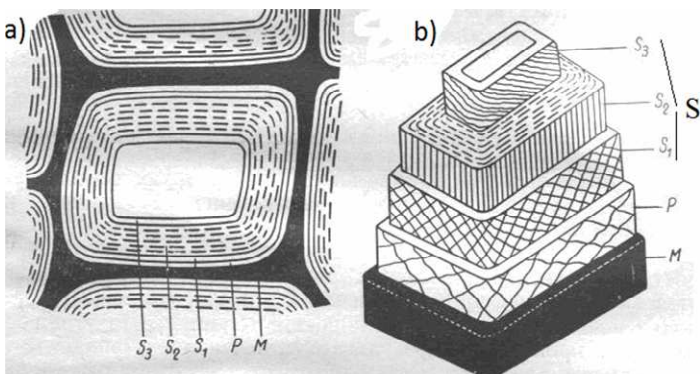


1. attēls . Koksnes makro un mikro struktūra [10,19]:

a)- koksnes makrostruktūra, ass *a*- koksnes šķiedru virziens, ass *r*- radiālais virziens(no serdes perpendikulāri gadskārtām), ass *t*- tangenciālais virziens, vērsts pa pieskari gadskārtām;

b)- priede, 1- gadskārta; 2- serdes stari; 3- vertikāla sveķu eja; 4- agrīnās traheīdas; 5- vēlīnās traheīdas; 6- pora traheīdu sieniņā; 7- starveida traheīdas; 8- starveida rinda ar horizontālām sveķu ejām;

c)- bērza koksne: 1- gadskārta; 2- serdes stari; 4- agrīnās traheīdas; 5- vēlīnās traheīdas; 9- trauku dobumi.



2.attēls. Šūnu sienīgas shematiska uzbūve [10]:

M-starpšūnu viela; *P*- Šūnu sienīgas pirmais slānis; *S*-šūnu sienīgas otrais slānis; *S*₁, *S*₂, *S*₃- otrā slāņa apakšslāņi.

Apskatot traheīdas sienīgu submikrolīmenī, tās uzbūve liecina par sienīgas anizotropiju (skat. 2. attēlu), jo sienīga sastāv no vairākiem slāņiem, kuri savukārt katrs sastāv galvenokārt no celulozes molekulu ķēdēm, kuras katrā slānī ir orientētas dažādi. Traheīdas sienīgu stiprību un noturību galvenokārt nodrošina otrā slāņa vidējais apakšslānis *S*₂, kurš ir ar vislielāko biezumu un attiecībā pret traheīdas garenasi, celulozes molekulu ķēdes ir pagrieztas 0-15^o leņķī. Tā, piemēram, elastības modulis traheīdu sienīgai tās garenass virzienā pēc F.Kollman datiem var mainīties robežās $E = 11,6 \div 44,6(GPa)$. Stiprība agrīnās koksnes traheīdu sienīgām garenass virzienā pēc F. Kollman datiem ir $\sigma_b = 350(MPa)$ un vēlinai koksnei $\sigma_b = 699(MPa)$.

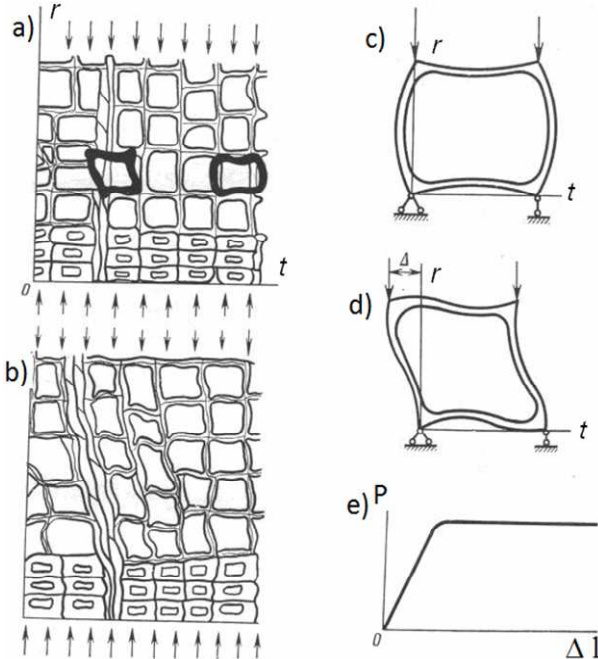
Detalizētu izklāstu par koksnes uzbūvi skatīt literatūrā [10].

2.2 Spiede radiālajā virzienā

Traheīdu sienīgu stiprība un stingums virzienā, kas ir perpendikulārs tās garenasij, ir daudz mazāki. Viens no iemesliem ir tas, ka sienīgās ir kapilāri un dažādi tukšumi, kas var būt pildīti ar *saistīto mitrumu*¹. Koksnei radiālajā virzienā pie spiedes ir raksturīgs traheīdu sienīgu noturības zudums agrīnajai koksnei (skat. 3. attēlu), lapu koku koksnei- trauku dobumu sienīgu noturības zudums. Līdzīgi notiek ar serdes

¹ Koksne izšķir divu veidu mitrumu- saistīto un brīvo. Ja koksnes mitruma saturs ir mazāks par 30%, tad tajā ir tikai saistītais mitrums, ja lielāks, tad arī brīvais mitrums. Koksnes izmēri mainās tikai tad, ja mainās saistītais mitrums. Būvkonstrukcijās parasti izmanto koksni, kurai mitrums ir aptuveni 12% [11].

stariem, kas iet caur agrīno koksni, tie zaudē noturību un noliecas uz vienu vai otru pusi (skat. 3. attēlu). Saspiežot koksni, vispirms noturību zaudē tās traheīdu sienīgas, kuras ir tuvāk serdes stariem un pēc tam lavīnveidā noturību zaudē arī pārējās traheīdu sienīgas. Ar to var skaidrot pieliktās slodzes un pārvietojuma grafika rakstura straujo izmaiņu (3.e attēls).

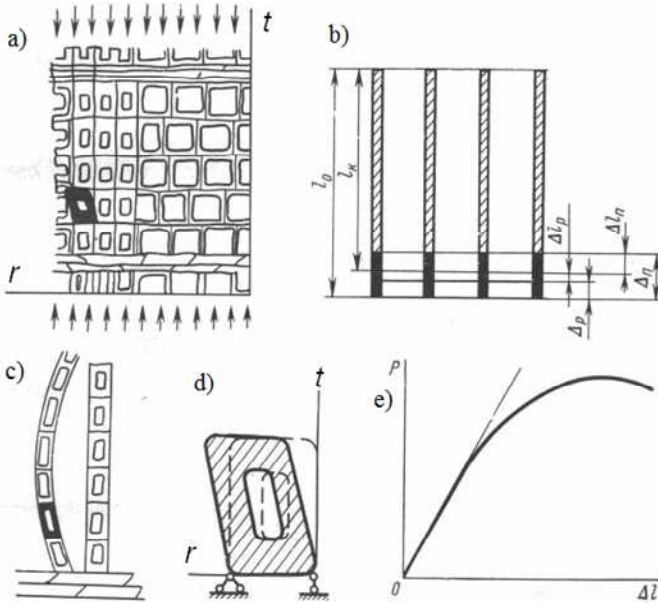


3. attēls. *Koksnes deformēšanās shēma pie spiedes radiālā virzienā [17]:*
a- koksnes parauga struktūras shematiskais attēls ar parādītām raksturīgajām traheīdu sienīgu deformāciju shēmām (tumšā krāsā);
b- koksnes struktūras izmaiņa slogojuma rezultātā;
c- traheīdu sienīgu, kuras atrodas tālu no serdes stariem, deformētā shēma;
d- traheīdu sienīgu, kuras atrodas pie serdes stariem, deformētā shēma;
e- pieliktā spēka P un absolūtās deformācijas Δl shematiska sakarība.

Kā rāda koksnes pētījumi, tās struktūra radiālā virzienā veido ļoti precīzi noformētu rindu. Precīzā struktūra, serdes stari un vēlīnā koksne, kas kā stinga diafragma notur agrīno koksni, nodrošina lielāku stingumu koksnes radiālajā virzienā, salīdzinājumā ar tangenciālo virzienu.

2.3 Spiede tangenciālajā virzienā

Pie koksnēs spiedes tangenciālajā virzienā (skat. 4. attēlu), nepieciešamas ņemt vērā spriegumus, kuri radušies žāvēšanas procesā, atšķirīgu rukuma koeficientu agrīnai un vēlīnai koksnēi dēļ. 4.b Attēlā shematiski parādīts mazs koksnēs fragments, kura garums pirms žūšanas ir l_0 , bet pēc žūšanas - l_k , iesvītrotie stabiņi shematiski parāda vēlīnās koksnēs slāņus, tukšumi starp tiem - agrīnās koksnēs slāņi. Ar simboliem Δ_{Π} un Δ_p apzīmēti deformāciju lielumi pie žūšanas agrīnai un vēlīnai koksnēi, ja tās deformētos atsevišķi (nebūtu kopā sasaistītas). Simboli Δ_{Π} un Δ_p apzīmē stiepes deformācijas vēlīnai koksnēi un spiedes deformācijas agrīnai koksnēi (deformējoties tām kopā), kas rodas žūšanas procesā nevienmērīgo rukuma koeficientu rezultātā. Spriegumi, kuri rodas šo deformāciju rezultātā un ārējās spiedes ietekmē, samazina stiepi vēlīnajā koksnē un palielina spiedi agrīnajā koksnē. Šāds spriegumu sadalījums slogošanas sākumā nosacīti neļauj spiedes spriegumus uzņemt vēlīnai koksnēi, kas ir viens no iemesliem palielinātai deformējamībai tangenciālajā virzienā salīdzinājumā ar radiālo virzienu. Kā jau iepriekš minēts, deformējamību palielina agrīnās koksnēs neprecīzā struktūra (skat. 4.a attēlu). Serdes staru deformējamība tangenciālajā virzienā ir lielāka kā radiālajā. Viss iepriekš teiktais noved pie secinājuma, ka koksnēs elastības modulis tangenciālajā virzienā ir mazāks kā radiālajā.



4. attēls. Tangenciālajā virzienā spiestas koksnes deformēšanās [17]:

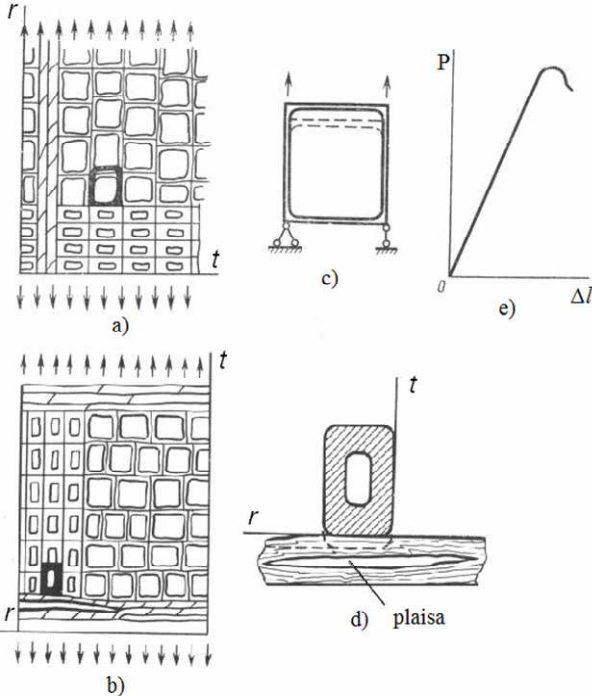
- a- fragments no koksnes struktūras, tumšākā krāsā iezīmēta raksturīgākā traheīdu sieniņu deformāciju shēma;
- b- deformēšanās aprēķinu shēma agrīnajai un vēlinājai koksnei to žāvējot;
- c- gadskārtu slāņu izliekšanās, zaudējot noturību, kas ir sekas vēlinās koksnes traheīdu bīdes deformāciju uzkrāšanās;
- d- deformētā shēma vēlinās koksnes traheīdai;
- e- sakarība starp pielikto slodzi un absolūtajām deformācijām tangenciālajā virzienā.

△

Pieaugot ārējā spiedes spēka vērtībai, sākotnēji stieptais vēlinās koksnes slānis kļūst spiests un pie noteikta spēka, vēlinās koksnes spiedes spriegumi pārsniedz vidējos spriegumus koksnē. Tas notiek tādēļ, ka vēlinās koksnes slānim ir lielāks stingums kā agrīnai koksnei. Tā kā koksnes gadskārtas ir ar izliektu formu un vēlinās koksnes traheīdu izmērs tangenciālajā virzienā ir nedaudz lielāks kā radiālajā, uzkrājas bīdes spēki vēlinās koksnes traheīdu sieniņās un tās maina formu kā parādīts 4.d attēlā. 4.e attēlā redzams, ka sakarība starp pielikto spiedes slodzi un absolūtajām deformācijām ir ar lineāru raksturu tikai sloģošanas sākumā. Pie maksimālās slodzes vērtības gadskārtas iegūst robežizliekumus. Tā kā parauga sagrūšana saistīta ar robeždeformāciju iestāšanos vēlinājā koksnē

(nevis agrīnā, kā tas bija radiālajā virzienā), tad robežstiprība pie spiedes tangenciālajā virzienā ir lielāka kā radiālajā.

2.4 Stiepe radiālajā un tangenciālajā virzienā



5. attēls. Koksnes deformācija pie stiepes radiālajā un tangenciālajā virzienā [17]:

a- radiālā virzienā stieptas koksnes deformēšanās;

b- tangenciālajā virzienā stieptas koksnes deformēšanās;

c- traheīdas deformāciju shēma;

d- plaisas veidošanās shēma serdes staros, pie stiepes tangenciālajā virzienā;

e- pieliktā spēka P un absolūtās deformācijas Δl sakarība.

Koksnei pie stiepes radiālajā virzienā stingums ir lielāks kā tangenciālajā virzienā. Tam iemesli ir līdzīgi kā pie spiedes:

1. traheīdu precīzais izkārtojums salīdzinājumā ar to izkārtojumu tangenciālajā virzienā (skat. 5.a, 5.b attēlā);

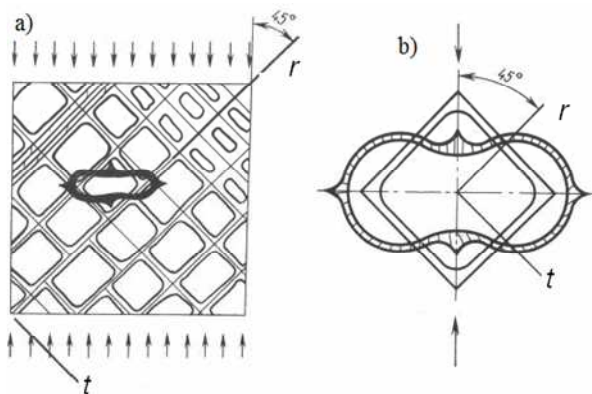
2. serdes staru virziena sakrišana ar spēka pielikšanas virzienu (skat. 5.a attēlā);
3. vēlīnās koksnes, kā stingas diafragmas, ietekme uz agrīno koksni, neatļaujot traheīdām šķērsdeformācijas un citi iemesli (skat. 5.a attēlā).

Koksnes sagrūvums notiek agrīnās koksnes traheīdu sienīnās. Sakarība starp pielikto stiepes spēku un absolūto deformāciju ir tuva lineārai (skat. 5.c attēlu).

Tā kā serdes stari pie stiepes tangenciālajā virzienā ir novietoti perpendikulāri stiepes spēkam (skat. 5.a. attēlu) un serdes stari ir veidoti no vāji sasaistītām šūnu ķēdēm, tad viegli saprast, ka sagrūšanas cēlonis ir plaisas parādīšanās serdes staros. Pie stiepes vismazākā stiprība ir tangenciālajā virzienā.

2.5 Spiede/Stiepe 45 grādu leņķī pret radiālo virzienu

Pie stiepes vai spiedes 45 grādu leņķī pret radiālo vai tangenciālo virzienu ir novērojama būtiska elastības moduļa samazināšanās, kas izrādās ir mazākā elastības moduļa vērtība koksnei. Lai to izskaidrotu ir jāaplūko koksne mikrolīmenī. Šādas traheīdu orientācijas gadījumā tām ir vismazākais stingums (taisnstūra rāmja spiede vai stiepe pa tā diagonāli), skat. 6. attēlu.



6. attēls. Koksnes deformēšanās pie spiedes 45 grādu leņķī pret radiālo virzienu [17]:

a- struktūras paraugs, ar iezīmētu raksturīgo traheīdas deformāciju;

b- agrīnās koksnes traheīdas raksturīgā deformāciju- noturības zaudēšanas forma.

3. KOKSNES MATERIĀLU UN STIEGROTU PLASTMASU DEFORMĒJAMĪBA

Iedarbojoties uz materiālu ārējiem spēkiem, vai apkārtējai videi (temperatūras izmaiņa, mitruma izmaiņa), materiālā rodas deformācijas un iekšējie spēki. Iekšējie un ārējie spēki veido līdzsvarotu spēku sistēmu, ko apraksta ar statiskā līdzsvara vienādojumiem. Iekšējos spēkus uz laukumu vienību sauc par spriegumiem. Sakarību starp spriegumiem un deformācijām apraksta ar fizikālajiem vienādojumiem.

Veicot galvenos stiprības un noturības aprēķinus, slodzi nesošām konstrukcijām vispārīgā gadījumā nākas risināt trīs vienādojumu grupās - statiskā līdzsvara vienādojumus, ģeometriskos un fizikālos vienādojumus. Pirmās divas vienādojumu grupas nav atkarīgas no konstrukcijas materiāla, bet fizikālie vienādojumi ir būtiski atkarīgi no konstrukcijas materiāla mehāniskām īpašībām. Šajā nodaļā aplūkoti tikai fizikālie vienādojumi. Lai iepazītos ar pārējām vienādojumu grupām, skatīt literatūru [8].

Iepriekšējās nodaļās parādīts, ka slogojot koksnī dažādos virzienos, tās stiprības un elastīgie raksturlielumi būtiski atšķiras. Lai vispārīgā gadījumā analītiski uzrakstītu sakarību starp spriegumiem un deformācijām, izmanto tenzoru algebras pieeju. Tenzoriāls lielums pagriežot koordinātu sistēmu mainās pēc kosinusa likuma. Detalizētu tenzoru algebras izklāstu skatīt literatūrā [6].

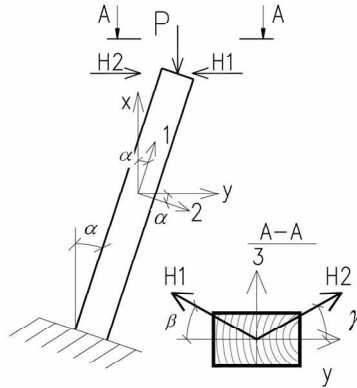
Izšķir šādus visbiežāk lietotos tenzoriālos lielumus:

- nulltā ranga- skalāri lielumi, piemēram, temperatūra, mitrums, blīvums;
- pirmā ranga- vektori, piemēram, spēks, ātrums, paātrinājums;
- otrā ranga- spriegums, deformācijas;
- ceturtā ranga- elastīgie raksturlielumi, kas saista spriegumus ar deformācijām, stiprības raksturlielumi.

3.1 Spēki un kopspēks

Rēķinot konstrukcijas deformācijas un spriegumus, bieži nepieciešams mehānisko spēku (pirmā ranga tenzors), kurš uzdots kā vektors ar trīs komponentēm, pierakstīt citā koordinātu sistēmā. Viens no vienkāršākajiem šāda veida uzdevumiem ir slodžu noteikšana slīpam stienim tā galvenajās koordinātu asīs. Aplūkosim gadījumu, kad uz slīpu stieni iedarbojas vertikāla slodze $P=10 \text{ kN}$ un divas leņķos vērstas horizontālas slodzes $H_1=2 \text{ kN}$ un $H_2=3 \text{ kN}$, $\beta = 25^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ (skat. 7. attēlu). Stienis ir slīpi novietots plaknē x-y, ar vertikāli veidojot leņķi $\alpha=30^\circ$. Lai noteiktu iekšējās piepūles stienī, nepieciešams iegūt spēku komponentes stieņa galvenajā koordinātu sistēmā- viena ass sakrīt ar stieņa

garenasi 1, pārējās divas sakrīt ar stieņa šķērsriezuma galvenajām asīm 2 un 3.



7. attēls. Slīpi orientēts stienis, slogots ar horizontāliem spēkiem H_1 , H_2 un vertikālu spēku P .

Uzrakstām stienim pielikto spēku (H_1, H_2, P) rezultējošā spēka vektora F projekcijas uz koordinātu asīm x, y, z :

$$F = (\lambda_x; \lambda_y; \lambda_z) = (-P, H_2 \cos(\gamma) - H_1 \cos(\beta), H_2 \sin(\gamma) + H_1 \sin(\beta)) \quad (1)$$

Lai iegūtu spēka vektora F projekcijas ($\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$) uz pagrieztās koordinātu sistēmas 1-2-3 asīm, lieto tā saucamo kosinusu matricu, kas ir otrās kārtas tenzors:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(1; x) & \cos(1; y) & \cos(1; z) \\ \cos(2; x) & \cos(2; y) & \cos(2; z) \\ \cos(3; x) & \cos(3; y) & \cos(3; z) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -P & H_2 \cos(\gamma) - H_1 \cos(\beta) & H_2 \sin(\gamma) + H_1 \sin(\beta) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(90 + \alpha) & \cos(90) \\ \cos(90 - \alpha) & \cos(\alpha) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix} = \quad , \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 3 \cdot \cos(40) - 2 \cdot \cos(25) & 3 \cdot \sin(40) + 2 \cdot \sin(25) \end{bmatrix} \cdot$$

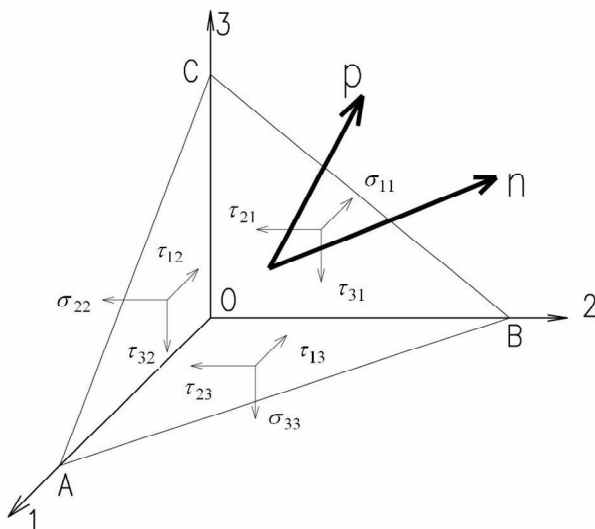
$$\begin{bmatrix} \cos(20) & \cos(110) & \cos(90) \\ \cos(70) & \cos(20) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,23 \\ 3,87 \\ 2,77 \end{bmatrix} \text{ (kN)}$$

kur, piemēram, $\cos(1, x)$ – kosinuss leņķim, ko veido asis 1 un x , līdzīgi jāsaprot arī pārējo leņķu kosinusi.

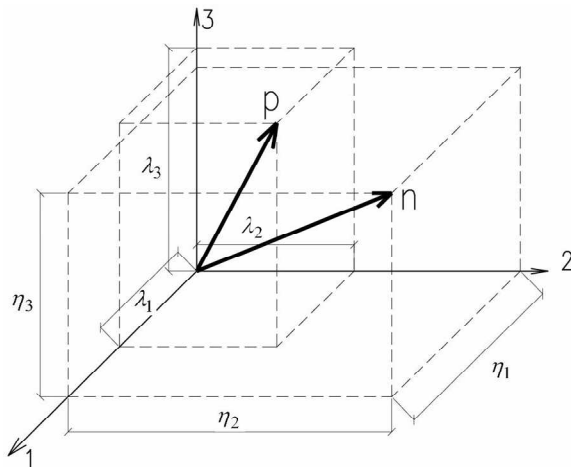
3.2 Spriegumi un deformācijas. Stingrības un padevīguma raksturlielumi

Deformācijas un spriegumi ir otrā ranga tenzori, bet deformāciju raksturlielumi (padevīguma raksturlielumi) ceturrtā ranga tenzori.

Lai pierādītu, ka spriegums ir otrā ranga tenzors, no patvaļīga ķermeņa izšķeļ trīsstūrveida piramīdu (skat. 8. attēlu), uz kuru darbojas spriegums p vienības laukumā ABC . Šī laukuma normāle sakrīt ar vienības vektoru n . Lai ķermenis būtu statiskā līdzsvarā, tam ir pieliktas deviņas iekšējo spriegumu komponentes σ_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$). Lielumu p definē ar trim projekcijām uz koordinātu asīm $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$, līdzīgi arī $n = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)$ (skat. 9. attēlu)



8. attēls. No ķermeņa izšķeltās piramīdas spriegumu stāvoklis uz tās skaldnēm.



9. attēls. Sprieguma p un laukuma normāles vektora n projekcijas uz koordinātu asīm.

Sprieguma p projekcijas uz koordinātu asīm var izteikt izmantojot vektora n projekcijas un deviņus pagaidām nezināmus koeficientus –

a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 \\ \lambda_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{23}\eta_3 \\ \lambda_3 = a_{31}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + a_{33}\eta_3 \end{cases} \quad (3)$$

Sareizinot visas spriegumu komponentes ar attiecīgo laukumu, uz kuru tās darbojas, iegūst koncentrētu spēku sistēmu, kura pielikta ķermeņa fragmentam. Uzrakstot spēka līdzsvara nosacījumus uz asīm 1, 2, 3 un veicot algebriskus pārveidojumus, iegūst, ka izteiksmē (3) koeficienti $a_{ij} = \sigma_{ij}$ un izteiksmi (3) var pārrakstīt šādi:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sigma_{11}\eta_1 + \tau_{12}\eta_2 + \tau_{13}\eta_3 \\ \lambda_2 = \tau_{21}\eta_1 + \sigma_{22}\eta_2 + \sigma_{23}\eta_3 \\ \lambda_3 = \tau_{31}\eta_1 + \tau_{32}\eta_2 + \sigma_{33}\eta_3 \end{cases} \quad (4)$$

Līdz ar to var izdarīt secinājumu, ka iekšējo spriegumu sistēma, kura sastāv no deviņām spriegumu komponentēm ir otrā ranga tenzors. Analogiskā veidā pierāda, ka ķermeņa deviņu komponentu deformāciju sistēma arī ir otrā ranga tenzors.

Vispārināto Huka likumu var pārrakstīt tenzoru formā, izsakot spriegumus ar deformācijām, izmantojot elastības tenzoru C_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) - ceturtā ranga tenzors, vai otrādi - izsakot deformācijas ar spriegumiem, izmantojot padevīguma tenzoru S_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) - ceturtā ranga tenzors:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (6)$$

Uzrakstot, piemēram, izteiksmi (6) izvērstā veidā, viegli redzēt, ka vispārīgā gadījumā ceturtā ranga tenzors - C_{ijkl} un S_{ijkl} sastāv no 81 koeficientiem:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \cdot \sigma_{11} + S_{1112} \cdot \tau_{12} + S_{1113} \cdot \tau_{13} + S_{1121} \cdot \tau_{21} + S_{1122} \cdot \sigma_{22} + S_{1123} \cdot \tau_{23} + S_{1131} \cdot \tau_{31} + S_{1132} \cdot \tau_{32} + S_{1133} \cdot \sigma_{33} \quad (7)$$

.....

$$\varepsilon_{33} = S_{3311} \cdot \sigma_{11} + ..$$

No materiālu pretestības ir zināms, ka pastāv šādas sakarības [16]:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} & \\ \tau_{12} = \tau_{21} & \gamma_{12} = \gamma_{21} & C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \\ \tau_{23} = \tau_{32} & \gamma_{23} = \gamma_{32} & S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \\ \tau_{13} = \tau_{31} & \gamma_{13} = \gamma_{31} & \end{array} \quad (8)$$

Līdz ar to deviņu komponentu spriegumu un deformāciju tenzoru var aizstāt ar 6 neatkarīgu komponentu sistēmu (īsuma labad, normālspriegumiem un atbilstošajām deformācijām raksta tikai vienu indeksu).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Vienu pusi pirms bīdes deformācijām γ raksta, jo aizstāj atsevišķās bīdes komponentes γ_{ij} un γ_{ji} , ar vienu kopējo bīdes deformāciju, kas ir šo abu summa.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0.5\gamma_{12} & 0.5\gamma_{31} \\ 0.5\gamma_{12} & \varepsilon_2 & 0.5\gamma_{23} \\ 0.5\gamma_{31} & 0.5\gamma_{23} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Līdzīgi arī 81 komponentu elastības un padevīguma tenzoru koeficientu sistēmu var reducēt uz 36 koeficientu matricām [8]:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Matricās (11) kopējais dažādo koeficientu skaits ir 21, jo šīs matricas ir simetriskas pret galveno diagonāli (šo faktu pierāda Elastības teorijā).

Vispārīgākajā gadījumā, ja koksnei ir nevienmērīga gadskārtu struktūra, tad lieto anizotropa materiāla deformēšanās vispārināto Huka likumu, ko matricu formā pieraksta šādi:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

kur S_{11}, S_{12}, \dots – padevīguma matricas koeficienti.

Padevīguma matricas koeficientus var aprēķināt, izmantojot *tehniskās konstantes*² [19]:

² Ar tehniskajām konstantēm tiek saprasti: elastības moduļi, bīdes moduļi, Puasona koeficienti, Čencova koeficienti, pirmā veida savstarpējās mijiedarbības koeficienti un otrā veida savstarpējās mijiedarbības koeficienti.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & \frac{\eta_{yz,x}}{E_x} & \frac{\eta_{zx,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} \\ \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_y} & \frac{\eta_{zx,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & \frac{\eta_{yz,z}}{E_z} & \frac{\eta_{zx,z}}{E_z} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_z} \\ \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{zx,xy}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} \\ \frac{\eta_{x,zx}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{y,zx}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{z,zx}}{G_{xz}} & \frac{\mu_{yz,zx}}{G_{xz}} & \frac{1}{G_{xz}} & \frac{\mu_{xy,zx}}{G_{xz}} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} & \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}} & \frac{\mu_{zx,xy}}{G_{xy}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

kur E_x, E_y, E_z – elastības moduļi asu x, y, z virzienos;

G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} – bīdes moduļi plaknēs, ko nosaka asis yz, xz, xy ;

$\nu_{yz}, \nu_{zy}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ – Puasona koeficienti, pirmais indekss norāda šķērsdeformācijas virzienu, otrais pieliktās slodzes virzienu;

$\mu_{xy,zx}, \mu_{zx,xy}, \mu_{xy,yz}, \mu_{yz,xy}, \mu_{yz,zx}$ – Čencova koeficienti - raksturo bīdi paralēlās plaknēs (otrie divi indeksi), ko izsauc bīdes spriegumi plaknē, ko nosaka pirmie divi indeksi, tā piemēram, $\mu_{zx,yz}$ – raksturo plaknē, kas paralēla yOz plaknei un kuru izsauc bīdes spriegumi τ_{zx} ;

$\eta_{yz,x}, \eta_{zx,x}, \dots, \eta_{xy,z}$ – savstarpējās mijiedarbības pirmā veida koeficienti - raksturo pagarinājumu (3 indekss), ko izsauc bīdes spriegumi, kas darbojas plaknē, ko nosaka pirmie divi indeksi;

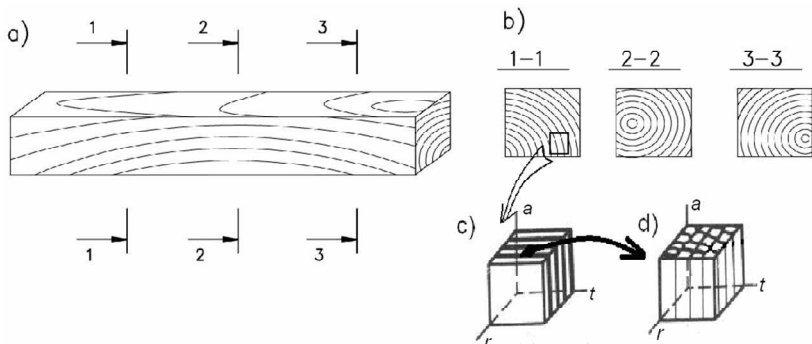
$\eta_{x,yz}, \eta_{y,yz}, \dots, \eta_{z,xy}$ – savstarpējās mijiedarbības otrā veida koeficienti - raksturo bīdi plaknē, ko nosaka otrais un trešais indekss, šo bīdi izsauc normālspriegumi virzienā, ko nosaka pirmais indekss.

Padevīguma matrica ir simetriska pret tās galveno diagonāli. Vispārināto Huka likumu par pierakstīt, izsakot spriegumu matricu šādi:

$$\sigma = S^{-1} \cdot \varepsilon = C \cdot \varepsilon, \quad (14)$$

kur matricu C sauc par stingruma(elastības) matricu, tās koeficientus iegūst sarēķinot padevīguma matricas S inverso matricu (skat. 3. pielikumā).

Tā kā eksperimentāli ir praktiski neiespējami noteikt visas tehniskās konstantes padevīguma matricā (13), tādēļ bieži lieto vienkāršotus deformēšanās modeļus, piemēram, transversāli izotropis modelis, ortotropis modelis.



10. attēls. Dažāda lieluma koksnes elementi un tiem pielietojamie aprēķina modeļi [17]:

a- koka šķautnis ar greizšķiedrainību, kam pielietojams transversiāli izotropu materiāla aprēķina modelis;

b- koka šķautņa šķērs griezumi dažādās vietās pa garumu;

c- ortotropa materiāla aprēķina modelis elementiem ar relatīvi mazu šķērs griezuma laukumu;

d- ortotropa materiāla aprēķina modelis (viens izmērs ir samērojams ar dažu gadskārtu kopējo izmēru radiālā virzienā, piemēram, lobskaida no kurām veido saplākšņa loksnes);

3.3. Zāģmateriāli un vienā virzienā stiegtas plastmasas - transversiāli izotropi materiāli

Aprēķina modeļa izvēli ietekmē apskatāmā koksnes parauga izmēri. Tā, piemēram, zāģmateriālus, kuru šķiedru orientācija un koksnes vainas pa tās garumu dažādos šķēļumos atšķiras, var uzskatīt par transversiāli izotropu materiālu. Savukārt mazus koksnes paraugus, ar ideālu koksnes struktūru pa to tilpumu, nevar uzskatīt par transversiāli izotropu materiālu, bet pareizāk uzskatīt par ortotropu materiālu. Transversiāli - izotropu materiāla gadījumā padevīguma matrica reducējas uz šādu (izotropijas plaknes normāle vērsta ass 1 virzienā) [4,7,16]:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1}{E_2} + \frac{\nu_{32}}{E_2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Šajā aprēķina modelī ir pieņemts, ka plaknē 23 materiāla īpašības nav atkarīgas no virziena, tas ir, plakne 23 šajā gadījumā ir izotropijas plakne. Koksnes zāģmateriālu gadījumā izotropijas plakne ir perpendikulāra šķiedru garenvirzienam.

3.4 Slāņaini materiāli un divos perpendikulāros virzienos stiegtas plastmasas- ortotropi materiāli

Slāņaini materiāli, kuri salīmēti no nolobītiem koksnes slāņiem - lobskaidām, vai vienā virzienā stiegtām plastmasas slāņiem, un ir ar simetrisku struktūru pret loksnes vidusplakni (balansēta struktūra), var tikt modelēti kā ortotropi materiāli. Simetriska struktūra pret vidusplakni nozīmē, ka virs un zem loksnes vidusplaknes (plakne, kas sakrīt ar loksnes plakni, un iet caur tās vidu) ir viena un tā pati slāņu struktūra. Koksnes lobskaida saistībā ar tās izgatavošanas (lobīšanas) īpatnībām arī var tikt uzskatīta par ortotropu materiālu.

Mazu koksnes elementu, ar idealizētu struktūru pa tā tilpumu (skat. 10.c. attēlu), var uzskatīt par **ortotropu** materiālu. Šajā gadījumā gadskārtu liekuma rādiuss ir daudzkārt lielāks par elementa malas garumu tangenciālajā virzienā, kas izraisa nepieciešamību ievērtēt mehānisko īpašību atšķirību starp tangenciālo un radiālo virzienu. Ortotropā materiāla gadījumā padevīguma matrica reducējas uz šādu [4,7,16] :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Ortotropa materiāla aprēķina modelī ir pieņemts, ka jebkurā materiālā punktā ir trīs tādas savstarpēji perpendikulāras plaknes, kurās materiālam nemainās mehāniskās īpašības.

Ja tiek aplūkots koksnes elements dažu gadskārtu robežās (skat. 10.d. attēlu), tad, tāpat kā iepriekš, var tikt izmantots ortotropa materiāla aprēķina modelis.

3.5 Zāgmateriālu un līmētas koksnes deformāciju aprēķina piemēri

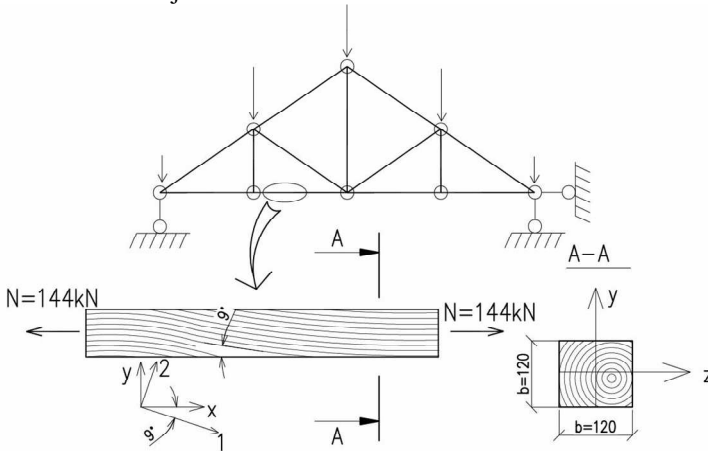
Aprēķinot deformācijas un spriegumus koksnes elementos, nepieciešams noteikt maksimālos normālspriegumus, maksimālos tangenciālos spriegumus, maksimālās deformācijas dažādos virzienos. Tiks doti daži aprēķina piemēri, no kuriem varēs redzēt, ka koksnes deformatīvās īpašības dažādos virzienos atbilst iepriekšējās nodaļās aprakstītajām koksnes struktūras deformēšanās īpatnībām.

3.5.1. Stiepts koka šķautnis

Kopnes apakšējā joslā, kas veidota no priedes koka šķautņa ar izmēriem 120x120 mm, darbojas stiepes piepūle $N=144$ kN (skat. 11. attēlā). Tehnoloģiska negadījuma dēļ, apakšējai joslai ir izmantots šķautnis ar greizšķiedrainību. Šim šķautnim lielākā šķiedru novirze no garenass ir 9^0 . Novērtēt šī tehnoloģiskā negadījuma ietekmi uz stieņa nestspēju.

Šim nolūkam nepieciešams noteikt normālspriegumus un tangenciālos spriegumus plāknē, kas perpendikulāra stieņa asij, kā arī

plaknē, kas perpendikulāra šķiedru virzienam greižšķiedrainības posmā un atbilstošās deformācijas.



11.attēls. Centriski stieptas kopnes apakšjoslas koka šķautnis.

Atrisinājums:

Vispirms nosaka maksimālos normālspriegumus ass x virzienā, izmantojot spriegumu definīciju:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{144 \cdot 10^{-3}}{120 \cdot 120 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ (MPa)}$$

Lai sarēķinātu maksimālos normālspriegumus, tangenciālos spriegumus šķautņa greižšķiedrainības posmā, lietošim transversiāli izotropā materiāla aprēķina modeli (15) (jo šķērsriezuma izmēri ir pietiekami lieli, skat. 10.a attēlu).

Elastības moduļus, Puasona koeficientus, bīdes moduļus priedes koksnei pie stiepes atrod 1. pielikumā. Elastības modulis šķiedru virzienā ir:

$$E_1 = 12300 \text{ (MPa)}$$

Izmantojot, to, ka izotropijas plaknē elastīgie raksturlielumi nav atkarīgi no virziena, aprēķināsim to vidējās vērtības šajā plaknē:

$$v_{21} = \frac{v_{ra} + v_{ta}}{2} = \frac{0,49 + 0,41}{2} = 0,450$$

$$v_{23} = \frac{v_{rt} + v_{tr}}{2} = \frac{0,38 + 0,79}{2} = 0,585$$

$$E_2 = \frac{E_t + E_r}{2} = \frac{590 + 510}{2} = 550 \text{ (MPa)}$$

$$G_{21} = \frac{G_{ra} + G_{ta}}{2} = \frac{1230 + 800}{2} = 1015 \text{ (MPa)}$$

Sarēķina padevīguma matricas koeficientus izmantojot (15) sakarību:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{12300} & -\frac{0.45}{12300} & -\frac{0.45}{12300} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0.45}{12300} & \frac{1}{550} & -\frac{0.585}{550} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0.45}{12300} & -\frac{0.585}{550} & \frac{1}{550} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1}{550} + \frac{0.585}{550}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1015} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1015} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\text{MPa}} \right)$$

Izmantojot šo padevīguma matricu no vispārinātā Huka likuma, nosakām šķautņa deformācijas posmā, kurā **nav greižšķiedrainība**:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{XY} \end{pmatrix} = 10^{-4} \begin{pmatrix} 0,81 & -0,36 & -0,36 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & 18,2 & -10,6 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & -10,6 & 18,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00081 \\ -0,00036 \\ -0,00036 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lai sarēķinātu spriegumus $-\sigma^*$ koordinātu sistēmā 1-2-3 (greižšķiedrainības posmā), ja tie ir zināmi koordinātu sistēmā x-y-z, lieto koordinātu pagriešanas matricu m^{-1} [4]:

$$\sigma^* = m^{-1} * \sigma, \quad (17)$$

$$m^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{12}a_{13} & \dots \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{22}a_{23} & \dots \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{32}a_{33} & \dots \\ a_{21}a_{31} & a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} & \dots \\ a_{31}a_{11} & a_{32}a_{12} & a_{33}a_{13} & a_{32}a_{13} + a_{33}a_{12} & \dots \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} & \dots \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 2a_{13}a_{11} & 2a_{11}a_{12} \\ \dots & 2a_{23}a_{21} & 2a_{21}a_{22} \\ \dots & 2a_{33}a_{31} & 2a_{31}a_{32} \\ \dots & a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31} \\ \dots & a_{33}a_{11} + a_{31}a_{13} & a_{31}a_{12} + a_{32}a_{11} \\ \dots & a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \quad (18)$$

kur nezināmos koeficientus atrod no šādas kosinusu matricas:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x;1) & \cos(x;2) & \cos(x;3) \\ \cos(y;1) & \cos(y;2) & \cos(y;3) \\ \cos(z;1) & \cos(z;2) & \cos(z;3) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

kur $\cos(x,1)$ – norāda kosinusu leņķim starp asīm x un 1 , līdzīgi aprēķināmi arī pārējie kosinusi.

Mūsu piemērā kosinusu matrica a ir šāda:

$$a = \begin{bmatrix} \cos(9) & \cos(81) & \cos(90) \\ \cos(99) & \cos(9) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,987 & 0,16 & 0 \\ -0,16 & 0,987 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m^{-1} = \begin{bmatrix} 0,975 & 0,024 & 0 & 0 & 0 & 0,309 \\ 0,024 & 0,975 & 0 & 0 & 0 & -0,309 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,988 & -0,156 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,156 & 0,988 & 0 \\ -0,154 & 0,154 & 0 & 0 & 0 & 0,951 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,975 & 0,024 & 0 & 0 & 0 & 0,309 \\ 0,024 & 0,975 & 0 & 0 & 0 & -0,309 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,988 & -0,156 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,156 & 0,988 & 0 \\ -0,154 & 0,154 & 0 & 0 & 0 & 0,951 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,75 \\ 0,24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,54 \end{pmatrix} \quad (MPa)$$

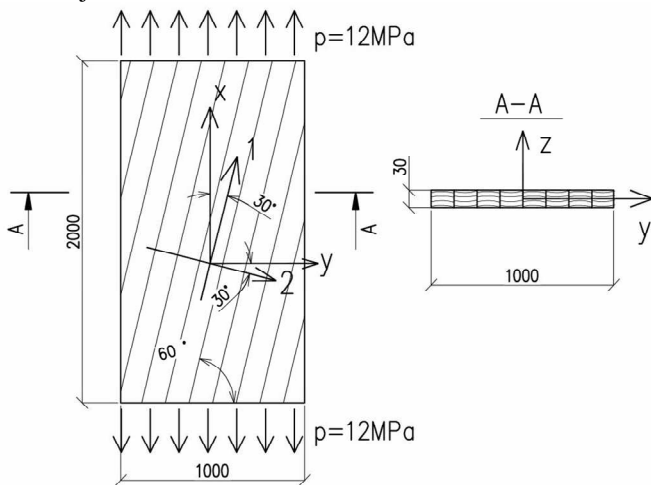
Lai sarēķinātu deformācijas koordinātu sistēmas 1-2-3 šķautņa greižšķiedrainības posmā, ievieto iepriekš iegūto spriegumu matricu un padevīguma matricu izteiksmē (12):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = 10^{-4} \begin{pmatrix} 0,81 & -0,36 & -0,36 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & 18,2 & -10,6 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & -10,6 & 18,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9,75 \\ 0,24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00078 \\ 0,000086 \\ -0,0006 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0015 \end{pmatrix}$$

Aprēķina rezultātā noskaidrots, ka pat pie nelielas koksnes greižšķiedrainības, rodas vēērā ņemamas papildus spriegumu komponentes perpendikulāri šķiedrām- 0,24 MPa un bīdes spriegumi- 1,54MPa, kas pārsniedz aprēķina pretestību [21]. Tai pat laikā, posmā, kurā nav greižšķiedrainība, ir daudz lielāka stiprības rezerve, jo 10MPa stiepes spriegumi vēl nesasniedz aprēķina pretestību.

3.5.2 Zem leņķa pret šķiedru virzienu stiepta koksnes elementa deformēšanās

No bērza koka dēļiem salīmēta plāksne ar garumu $L=2000mm$, platumu $B=1000 mm$ un biezumu $t=30 mm$. Pie elementa gala skaldnēm pielikta vienmērīgi izkliedēta slodze $p=10MPa$. Dēļi ir orientēti 60° leņķī pret asi y (skat. 12. attēlu). Jānosaka maksimālie normālspriegumi, tangenciālie spriegumi, maksimālās garendeformācijas un šķērsdeformācijas.



12. attēls. Koka plāksne un pielikto spēku shēma.

Atrisinājums:

Šo uzdevumu visvieglāk atrisināt izmantojot vispārināto Huka likumu (12). Šajā gadījumā plāksne veidota no relatīvi maza šķērsriezuma elementiem, tādēļ koksni var tuvināti uzskatīt par ortotropu materiālu [17]. Koksnes tangenciālais virziens sakrīt ar asi 2, radiālais ar asi 3, aksiālais ar asi 1.

Uzraksta padevīguma matricu ortotropam materiālam izmantojot sakarību (16), elastīgos raksturlielumus pieņem no 1. pielikuma, 1,2,3. tabulas, tos koriģējot tā, lai izpildītos ortotropa materiāla padevīguma matricas simetrija pret galveno diagonāli:

1. Tabula.

Bērza koksnes elastīgie raksturlielumi pie 12% mitruma

E_1, MPa	E_3, MPa	E_2, MPa	G_{31}, MPa	G_{21}, MPa	G_{32}, MPa
18700	680	500	1540	890	230

2. Tabula.

Puasona koeficienti bērza koksnei pie mitruma no 10- 15%

ν_{31}	ν_{21}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}	ν_{32}
0.580	0.450	0.021	0.67	0.012	0.490

*1- aksiālais virziens; 3- radiālais virziens; 2- tangenciālais virziens.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0,45 & 0,021 & 0 & 0 & 0 \\ 18700 & 18700 & 680 & 0 & 0 & 0 \\ 0,012 & 1 & 0,49 & 0 & 0 & 0 \\ 500 & 500 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0,58 & 0,67 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 18700 & 680 & 680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{230} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1540} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{890} \end{pmatrix} =$$

$$= 10^{-4} \begin{pmatrix} 0,535 & -0,24 & -0,31 & 0 & 0 & 0 \\ -0,24 & 20 & -9,85 & 0 & 0 & 0 \\ -0,31 & -9,85 & 14,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 43,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11,2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{MPa} \right)$$

Uzraksta kosinusu matricu koordinātu transformācijai no koordinātu sistēmas x-y-z uz 1-2-3:

$$a = \begin{bmatrix} \cos(1; x) & \cos(1; y) & \cos(1; z) \\ \cos(2; x) & \cos(2; y) & \cos(2; z) \\ \cos(3; x) & \cos(3; y) & \cos(3; z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30) & \cos(60) & \cos(90) \\ \cos(120) & \cos(30) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lai sarēķinātu deformācijas pagrieztajā koordinātu sistēmā x-y-z, nepieciešams iegūt šajā koordinātu sistēmā plāksnes padevīguma matricu S^* . To var izdarīt izmantojot transformācijas matricas n , m , m^T , n^T . Starp spriegumiem, deformācijām, padevīguma un stinguma matricām kas uzrakstītas sākotnējā un jaunajā koordinātu sistēmā pastāv šādas sakarības [4]:

$$\sigma = m \cdot \sigma^* \quad \varepsilon = n \cdot \varepsilon^* \quad (20)$$

$$\sigma^* = m^{-1} \cdot \sigma \quad \varepsilon^* = n^{-1} \cdot \varepsilon \quad (21)$$

$$S^* = m^T \cdot S \cdot m \quad C^* = n^T \cdot C \cdot n \quad (22)$$

kur matricu m^T , m , n^T , n koeficienti iegūstami šādi [1]:

$$m^{-1} = n^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{12}a_{13} & \dots \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{22}a_{23} & \dots \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{32}a_{33} & \dots \\ a_{21}a_{31} & a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} & \dots \\ a_{31}a_{11} & a_{32}a_{12} & a_{33}a_{13} & a_{32}a_{13} + a_{33}a_{12} & \dots \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 2a_{13}a_{11} & 2a_{11}a_{12} \\ \dots & 2a_{23}a_{21} & 2a_{21}a_{22} \\ \dots & 2a_{33}a_{31} & 2a_{31}a_{32} \\ \dots & a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31} \\ \dots & a_{33}a_{11} + a_{31}a_{13} & a_{31}a_{12} + a_{32}a_{11} \\ \dots & a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$n^{-1} = m^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{21}^2 & a_{31}^2 & a_{21}a_{31} & \dots \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 & a_{32}^2 & a_{22}a_{32} & \dots \\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & a_{33}^2 & a_{23}a_{33} & \dots \\ 2a_{12}a_{13} & 2a_{22}a_{23} & 2a_{32}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23} & \dots \\ 2a_{13}a_{11} & 2a_{23}a_{21} & 2a_{33}a_{31} & a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21} & \dots \\ 2a_{11}a_{12} & 2a_{21}a_{22} & 2a_{31}a_{32} & a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & a_{31}a_{11} & a_{11}a_{21} \\ \dots & a_{32}a_{12} & a_{12}a_{22} \\ \dots & a_{33}a_{13} & a_{13}a_{23} \\ \dots & a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13} \\ \dots & a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11} \\ \dots & a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Sārēķina matricas m^T koeficientus, izmantojot matricas a koeficientus

$$m^T = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & -0,433 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0,433 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,866 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0,866 & -0,866 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

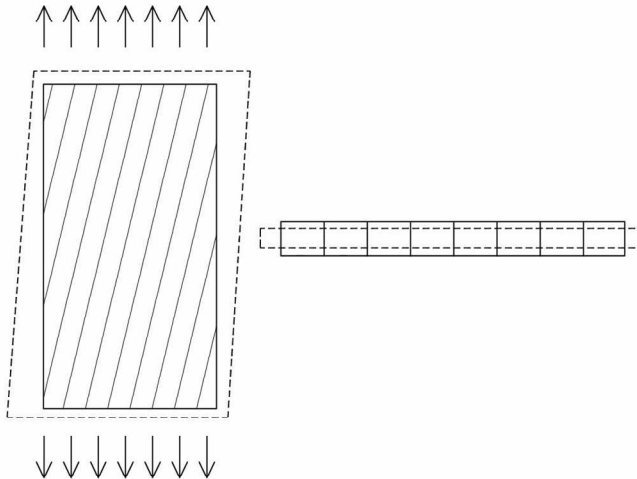
Izmantojot šo matricu iegūst padevīguma matricu jaunajā koordinātu sistēmā x-y-z:

$$\begin{aligned}
S^* = m^T \cdot S \cdot m &= \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & -0,433 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0,433 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,866 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0,866 & -0,866 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \\
&\cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 20 & -9,85 & -0,24 & 0 & 0 & 0 \\ -9,85 & 14,7 & -0,31 & 0 & 0 & 0 \\ -0,24 & -0,31 & 0,535 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43,5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,866 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & -0,866 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,866 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,866 & 0 \\ -0,433 & 0,433 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \\
&= 10^{-4} \begin{bmatrix} 3,6 & 1,6 & -2,7 & 0 & 0 & -6,3 \\ 1,6 & 13,3 & -7,5 & 0 & 0 & -10,5 \\ -2,7 & -7,5 & 14,7 & 0 & 0 & 8,2 \\ 0 & 0 & 0 & 34,2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 15,7 & 0 \\ -6,3 & -10,5 & 8,2 & 0 & 0 & 18,6 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{MPa} \right)
\end{aligned}$$

No dotā uzdevuma var izsecināt, ka koordinātu sistēmā x-y-z no ārējās slodzes rodas viena spriegumu komponente $\sigma_x = 12MPa$, līdz ar to, izmantojot vispārināto Huka likumu, var sarēķināt šajā koordinātu sistēmā visas deformāciju komponentes:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = S^* \cdot \sigma^* = 10^{-4} \begin{bmatrix} 3,6 & 1,6 & -2,7 & 0 & 0 & -6,3 \\ 1,6 & 13,3 & -7,5 & 0 & 0 & -10,5 \\ -2,7 & -7,5 & 14,7 & 0 & 0 & 8,2 \\ 0 & 0 & 0 & 34,2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 15,7 & 0 \\ -6,3 & -10,5 & 8,2 & 0 & 0 & 18,6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00432 \\ 0,00192 \\ -0,00324 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0076 \end{pmatrix}$$

Atbilstoši iegūtajiem rezultātiem varam secināt, ka pie aksiālas stiepes šīs plātnes viens izmērs šķērsvirzienā palielinās, otrs samazinās (skat. 13. attēlu):



13.attēls. *Plātnes deformētā shēma.*

Izmantojot aprēķinātās relatīvās deformācijas, nosakām absolūtos plātnes pārvietojumus trīs asu virzienos:

$$\Delta L_x = \varepsilon_x \cdot L = 0,00432 \cdot 2000 = 8,64(\text{mm})$$

$$\Delta L_y = \varepsilon_y \cdot B = 0,00192 \cdot 1000 = 1,92(\text{mm})$$

$$\Delta L_z = \varepsilon_z \cdot t = -0,00324 \cdot 30 = -0,0972(\text{mm})$$

un plātnes taisnā leņķa izmaiņu

$$\gamma_{xy} = -0,00756(\text{radiani}) = -0,00756 \cdot \frac{180}{\pi} = -0,43^0$$

No padevīguma matricas konstantēm izsakām elastīgās konstantes koordinātu sistēmā x-y-z [13]:

$$E_x = \frac{1}{S_{11}^*} = \frac{1}{3,6 \cdot 10^{-4}} = 2778(\text{MPa})$$

$$E_y = \frac{1}{S_{22}^*} = \frac{1}{13,3 \cdot 10^{-4}} = 752(\text{MPa})$$

$$E_z = \frac{1}{S_{33}^*} = \frac{1}{14,7 \cdot 10^{-4}} = 680(\text{MPa})$$

$$v_{yx} = -\frac{S_{12}^*}{S_{11}^*} = -\frac{1,6 \cdot 10^{-4}}{3,6 \cdot 10^{-4}} = -0,44$$

$$v_{zx} = -\frac{S_{13}^*}{S_{11}^*} = -\frac{-2,7 \cdot 10^{-4}}{3,6 \cdot 10^{-4}} = 0,75$$

$$v_{zy} = -\frac{S_{23}^*}{S_{22}^*} = -\frac{-7,5 \cdot 10^{-4}}{13,3 \cdot 10^{-4}} = 0,56$$

$$G_{yz} = \frac{1}{S_{44}^*} = \frac{1}{34,2 \cdot 10^{-4}} = 292(\text{MPa})$$

$$G_{xz} = \frac{1}{S_{55}^*} = \frac{1}{15,7 \cdot 10^{-4}} = 637(\text{MPa})$$

$$G_{xy} = \frac{1}{S_{66}^*} = \frac{1}{18,6 \cdot 10^{-4}} = 538(\text{MPa})$$

Puasona koeficients plaknē (plaknē x-y) ir negatīvs. Līdz ar to, pieliekot stiepes spēku x ass virzienā, plātnes šķērsdeformācija (ass y virzienā) šajā plaknē ir pozitīva.

Projektējot koka un plastmasu konstrukciju elementus, ir nepieciešams noteikt spriegumus šķiedru virzienā un perpendikulāri tām [18]. Lai to izdarītu, ir jāveic spriegumu matricas transformācija no koordinātu sistēmas x-y-z uz koordinātu sistēmu 1-2-3, kas sakrīt ar koksnes galvenajām asīm:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = m \cdot \sigma^* = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,866 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & -0,866 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,866 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,866 & 0 \\ -0,433 & 0,433 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5,2 \end{pmatrix} \text{ (MPa)}$$

Aprēķinātās spriegumu vērtības parāda, ka maksimālie stiepes spriegumi šķiedru virzienā ir 9MPa, perpendikulāri šķiedrām - 3 MPa, bet plaknē 1-2 darbojas bīdes spriegumi 5.2 MPa. Spriegumu vērtības būtiski pārsniedz pieļaujamos stiepes spriegumus perpendikulāri šķiedrām un pieļaujamos bīdes spriegumus [21]. Turpretī, ja salīmētie dēļi būtu orientēti pieliktās slodzes virzienā, tad neviena spriegumu komponente nepārsniegtu pieļaujamās vērtības.

4. SLĀŅAINU MATERIĀLU AR NESIMETRISKU PRET VIDUSPLAKNI STRUKTŪRU DEFORMĒJAMĪBA

Slāņainas loksnes ar nesimetrisku struktūru pret vidusplakni deformējas savādāk kā simetriskas loksnes, jo, piemēram, centriski stiepjot plakānu loksni, tā ne tikai pagarinās, bet tā var arī izliekties vai savērtties, kas tiks pierādīts nākamajās nodaļās. Daudzos gadījumos šādas loksnes nav ieteicams lietot, to deformēšanās īpatnību dēļ, taču atsevišķās situācijās, mērķtiecīgi izveidojot slāņu struktūru, var panākt vēlamu loksnes uzvedību. Tā, piemēram, pakļaujot šādas loksnes mainīga mitruma iedarbei, var iegūt liektas formas čaulas, kuras var izmantot kā paneļu elementus ar paaugstinātu īpatnējo stiprību, salīdzinot ar plakanām loksniem.

Ar slāņainiem lokšņveida materiāliem parasti saprot loksnes, kuru biezums ir daudzkārt mazāks par garumu un platumu (attiecība starp īsāko malas garumu un biezumu lielāka par 20). Šādām, relatīvi plānām loksniem, inženiertehniskos aprēķinos pieņemts neņemt vērā relatīvo deformāciju komponenti, kuras virziens sakrīt ar loksnes normāles virzienu, kā arī bīdes deformācijas pa loksnes biezumu un platumu. Tiek pieņemts, ka normālspriegumu sadalījums pa katru slāni ir lineārs. Līdz ar to vispārinātais Huka likums, viena slāņa robežās, reducējas uz šādām sakarībām:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

kur koksnes saplākšņa gadījumā virziens 1- aksiālais virziens lobskaidai, 2-tangenciālais virziens lobskaidai.

Lai iegūtu nepieciešamās loksnes mehāniskās īpašības, slāņu orientācija (lobskaidu orientācija saplākšņu gadījumā) var būt ļoti dažāda [5,12,20]. Nepieciešams iegūt spriegumu un deformāciju matricas loksnes

globālajā koordinātu sistēmā- x-y-3. To dara lietojot transformācijas matricu T, kas iegūta no matricas m, atmetot nevajadzīgās komponentes:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \frac{\gamma_{XY}}{2} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (28)$$

kur φ – loksnes orientācijas leņķis - leņķis starp asīm x un 1, kā arī y un 2.

Loksnes stinguma matricas un padevīguma matricas koeficientus pagriezta koordinātu sistēmā x-y-3 var sarēķināt izmantojot šādu sakarību:

$$C^* = T^{-1} \cdot C \cdot R \cdot T \cdot R^{-1}, \quad S^* = R \cdot T^{-1} \cdot R^{-1} \cdot S \cdot T \quad (29)$$

$$\text{kur } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izmantojot iepriekšējās sakarības, var uzrakstīt vispārināto Huka likumu loksnes kopējā koordinātu sistēmā x-y-3:

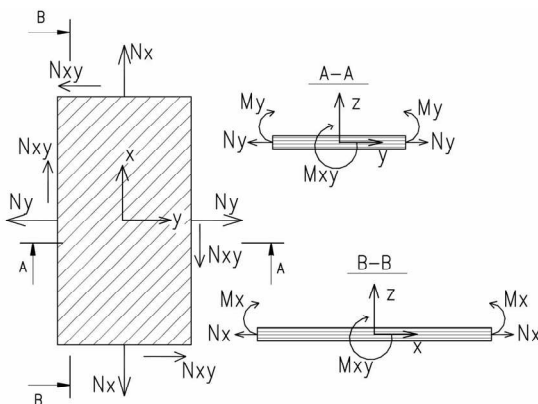
$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = C^* \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = S^* \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Risinot praktiskus uzdevumus, izdevīgāk aizstāt spriegumu matricas ar ekvivalentām spēku un momentu matricām (skat. 14. attēlu). Katra slāņa relatīvās deformācijas izdevīgi aizstāt ar loksnes kopējām vidusplaknes relatīvajām deformācijām ($\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$), ieviešot papildus lielumus- loksnes liekumus un vērpus (k_x, k_y, k_{xy}). Slāņainu lokšņu deformēšanās likumu var pierakstīt arī šādi:

$$\begin{pmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_{XY} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (32)$$

kur $N_X, N_Y, N_{XY}, M_X, M_Y, M_{XY}$ – spēku un momentu sistēma, kura darbojas loksnes vidusplaknes līmenī.



14. attēls. Uz slāņainu materiālu elementāru paralelopiedu darbojošos spēku un momentu shēma.

Matricu A, B, D koeficientus nosaka pēc šādām sakarībām:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (C_{ij}^*)_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (C_{ij}^*)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (C_{ij}^*)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (33)$$

n - kopējais slāņu skaits slāņainā loksne;

z_k - k -tā slāņa augšējā (lielākā) koordināte pa z asi;

z_{k-1} - k -tā slāņa apakšējā (mazākā) koordināte pa z asi

Veicot skaitļošanas operācijas ar datora palīdzību, ērti iepriekšējās izteiksmes pierakstīt kā vienu matricu vienādojumu:

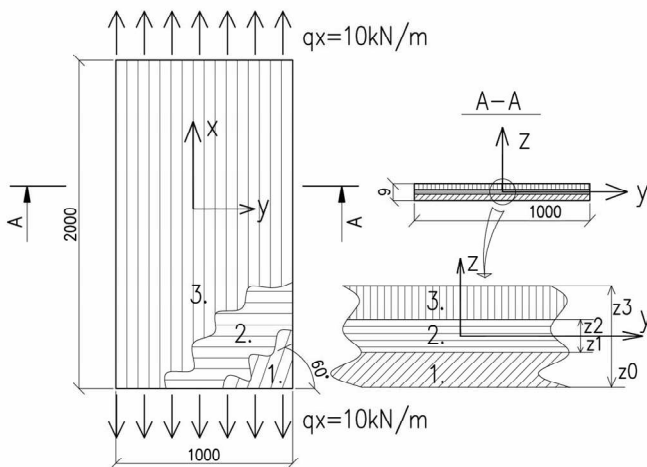
$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Izsakot no iepriekšējā vienādojuma deformāciju matricu, iegūst vienādojumu:

$$\begin{Bmatrix} \{\epsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

4.1 Trīs slāņu saplākšņa loksnes vienasīga stiepe garenass virzienā

Jānosaka formas izmaiņas stieptā 3-slāņu bērza saplākšņa loksnē, kuras slāņu orientācijas leņķi pret loksnes x asi ir $30^\circ/90^\circ/0^\circ$ (skat. 15. attēlu). Katras lobskaidas biezums ir 3 mm, loksnes garums 2000 mm, platums 1000 mm, kopējais biezums – 9mm. Pie loksnes īsākās malas pielikta pa tās garumu vienmērīgi izkliedēta slodze ar intensitāti $q_x=10$ kN/m.



15. attēls. Loksnes struktūra, izmēri un pieliktā slodze.

Atrisinājums:

Lobskaidu, tās izgatavošanas procesa īpatnību dēļ, var tuvināti uzskatīt par ortotropu materiālu, kuram viena ass sakrīt ar radiālo virzienu (pa lobskaidas biezumu vērsta), pārējās divas ar tangenciālo un aksiālo. Uzdevumu risinot pieņem, ka ass 1 vērsta lobskaidas aksiālajā virzienā, ass 2- tangenciālajā.

Lobskaidas elastīgie raksturlielumu ņemti no 1. pielikuma (Puasona koeficientu vērtības koriģētas, tā, lai izpildītos padevīguma matricas simetrija). Tiek pieņemts, ka stiepes gadījumā lobskaidas un nelīmētai bērza koksnes (mitr. 12%) elastības raksturlielumi ir identiski. To vērtības ir šādas:

$$E_1 = 18700(MPa)$$

$$E_2 = 500(MPa)$$

$$G_{12} = 890(MPa)$$

$$\nu_{12} = 0,012$$

$$\nu_{21} = 0,45$$

Uzraksta elastības matricu lobskaidai, tās lokālajā koordinātu sistēmā 1-2:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18700}{1 - 0,012 \cdot 0,45} & \frac{0,45 \cdot 500}{1 - 0,012 \cdot 0,45} & 0 \\ \frac{0,012 \cdot 18700}{1 - 0,012 \cdot 0,45} & \frac{500}{1 - 0,012 \cdot 0,45} & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18802 & 226 & 0 \\ 226 & 502 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix} (MPa)$$

Aprēķina elastības matricu $((C^*)_1, (C^*)_2, (C^*)_3)$ koeficientus pirmajai, otrajai un trešajai lobskaidai loksnes globālajā koordinātu sistēmā x-y:

$$(C^*)_h = T_{(0)}^{-1} \cdot C \cdot R \cdot T_{(0)} \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2 30 & \sin^2 30 & -2 \sin 30 \cdot \cos 30 \\ \sin^2 30 & \cos^2 30 & 2 \sin 30 \cdot \cos 30 \\ \sin 30 \cdot \cos 30 & -\sin 30 \cdot \cos 30 & \cos^2 30 - \sin^2 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18802 & 226 & 0 \\ 226 & 502 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 30 & \sin^2 30 & 2 \sin 30 \cdot \cos 30 \\ \sin^2 30 & \cos^2 30 & -2 \sin 30 \cdot \cos 30 \\ -\sin 30 \cdot \cos 30 & \sin 30 \cdot \cos 30 & \cos^2 30 - \sin^2 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11359 & 3093 & 5617 \\ 3093 & 2210 & 2306 \\ 5617 & 2306 & 3757 \end{pmatrix} (MPa)$$

$T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}$ - Transformācijas matrica 1., 2., 3. slānim attiecīgi par $30^0/90^0/0^0$.

$$\begin{aligned} (C^*)_{2} &= T_{(2)}^{-1} \cdot C \cdot R \cdot T_{(2)} \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 502 & 226 & 0 \\ 226 & 18802 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix} (MPa) \\ (C^*)_{3} &= T_{(3)}^{-1} \cdot C \cdot R \cdot T_{(3)} \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 18802 & 226 & 0 \\ 226 & 502 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix} (MPa) \end{aligned}$$

Nosaka matricu A, B, D koeficientus:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^3 (C^*)_{k} (z_k - z_{k-1}) = (C^*)_{1} \cdot (-0.0015 - (-0.0045)) + \\ &+ (C^*)_{2} \cdot (0.0015 - (-0.0015)) + (C^*)_{2} \cdot (0.0045 - 0.0015) = \\ &= \begin{pmatrix} 92 & 10,6 & 16,85 \\ 10,6 & 64,5 & 6,9 \\ 16,85 & 6,9 & 16,6 \end{pmatrix} (MPa \cdot m) \end{aligned}$$

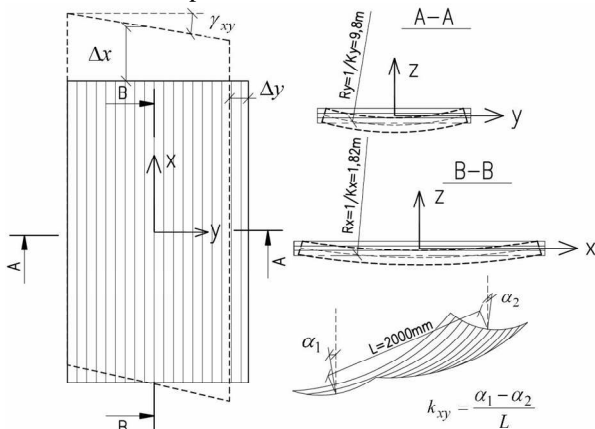
$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (C^*)_{k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = 0.5 \cdot (C^*)_{1} \cdot ((-0.0015)^2 - (-0.0045)^2) + \\ &+ 0.5 \cdot (C^*)_{2} \cdot (0.0015^2 - (-0.0015)^2) + 0.5 \cdot (C^*)_{2} \cdot (0.0045^2 - 0.0015^2) = \\ &= 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 67 & -25,8 & -51 \\ -25,8 & -15,4 & -20,8 \\ -51 & -20,8 & -25,8 \end{pmatrix} (MPa \cdot m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (C^*)_{k} (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \frac{1}{3} \cdot (C^*)_{1} \cdot ((-0.0015)^3 - (-0.0045)^3) + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot (C^*)_{2} \cdot (0.0015^3 - (-0.0015)^3) + \frac{1}{3} \cdot (C^*)_{2} \cdot (0.0045^3 - 0.0015^3) = \\ &= 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 88 & 9,8 & 16,4 \\ 9,8 & 12,2 & 6,7 \\ 16,4 & 6,7 & 13,8 \end{pmatrix} (MPa \cdot m^3) \end{aligned}$$

Izmantojot matricas A, B, D un deformēšanās likumu (35), aprēķina loksnes vidusplaknes relatīvās deformācijas, liekumus un vērpusus:

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 92 & 10,6 & 16,85 & 0,067 & -0,0258 & -0,051 \\ 10,6 & 64,5 & 6,9 & -0,028 & -0,0154 & -0,0208 \\ 16,85 & 6,9 & 16,6 & -0,051 & -0,0208 & -0,0258 \\ 0,067 & -0,0258 & -0,051 & 0,00088 & 0,000098 & 0,000164 \\ -0,028 & -0,0154 & -0,0208 & 0,000098 & 0,000122 & 0,000067 \\ -0,051 & -0,0208 & -0,0258 & 0,000164 & 0,000067 & 0,000138 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,000257 \\ -0,00000165 \\ -0,00026 \\ -0,0548 \\ -0,0102 \\ 0,1156 \end{pmatrix}$$

Loksne ar šādu struktūru pie centriskas stiepes ar vienmērīgi izkliedētu slodzi pa tās platumu, ne vien izmaina savus izmērus (pagarinās un sašaurinās), bet arī maina formu - izliecas un savērpjas. Shematiski loksnes deformētā forma ir parādīta 16. attēlā.



16. attēls. Centriski stieptas loksnes ar nesimetrisku struktūru 30/90/0 deformētā shēma.

Izmantojot aprēķinātās relatīvās deformācijas, nosakām maksimālos pārvietojumus x un y virzienos, kā arī taisnā leņķa izmaiņu saplākšņa plaknē:

$$\Delta x = L \cdot \varepsilon_x = 2000 \cdot 0,0257 = 0,514(mm)$$

$$\Delta y = B \cdot \varepsilon_y = 1000 \cdot (-0,00000165) = 0,00165(mm)$$

$$\gamma_{xy} = -0,00026(rad) = -0,00026 \cdot \frac{180}{\pi} = 0,015^0$$

Izmantojot aprēķinātās liekumu vērtības, nosakām liekumu rādiusus pa x un y asīm:

$$R_x = \frac{1}{k_x} = \frac{1}{-0,0548} = 18,2(m)$$

$$R_y = \frac{1}{k_y} = \frac{1}{-0,0102} = 98(m)$$

Loksnes vērpums raksturo to, par cik radiāniem mainās loksnes normāles novirze no vertikāles 1 m garā loksnes posmā (loksnes galvenajos virzienos x un y):

$$k_{xy} = 0,1156 \left(\frac{rad}{m} \right) = 0,1156 \cdot \frac{180}{\pi} = 6,6 \left(\frac{grad}{m} \right)$$

Šajā gadījumā loksnei ir izteikta tieksme savērties, jo 1 m garā posmā loksnes normāle pagriežas par $6,6^0$, kas salīdzinot ar pārējām deformācijām ir visizteiktākā.

Var sarēķināt vērpes deformāciju izraisītos pārvietojumus:

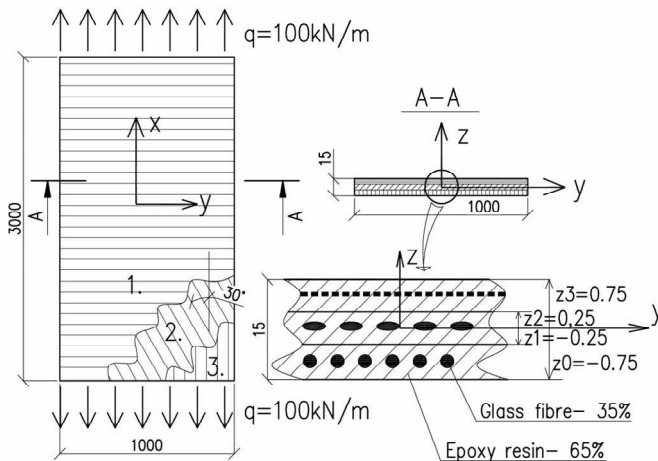
$$\Delta z = B \cdot \sin(L \cdot k_{xy}) = 1000 \cdot \sin(2 \cdot 6,6) = 228(mm)$$

Iegūtās deformācijas un pārvietojumi parāda, ka ļoti būtiski ir izmainījusies loksnes sākotnēji plakanā forma - tā ir savērpusies.

4.2. Stiegrotas plastmasas loksnes stiepe

Izmantojot 3. pielikumā dotos datus par plastmasu lokšņu stiegru un saistvielas mehāniskajām īpašībām, tiks atrisināts uzdevums par slāņainas plastmasu loksnes deformēšanos, iedarbojoties uz to mehāniskai slodzei.

Izvēlamies loksni, kura sastāv no trīs kopā salīmētiem slāņiem. Slāņos kā saistviela izmantoti epoksīda sveķi, bet kā stiegrojums stiklašķiedra. Visi slāņi stiegtoti vienā virzienā un stiegrojumu saturs ir 35% - $k=0.35$. Katra slāņa biezums ir 0.5mm, kopējais loksnes biezums - 1.5 mm. Pirmā slāņa stiegras vērsta 90^0 leņķi pret loksnes garenasi, otrā- 30^0 , bet trešā -0^0 . Loksnes garenvirzienā pielikts stiepes spēks ar intensitāti 100 kN/m. Pieliktā spēku shēma un loksnes ģeometrija dota 17. attēlā. Uzdevums ir noteikt dotās loksnes deformācijas.



17. attēls. Stiegrotu plastiku loksne ar pielikto spēku shēmu.

Atrisinājums:

3. pielikumā, 1. un 2. tabulā atrod stiklašķiedras un epoksīdu sveķu elastīgos raksturlielumus:

$$E_{1,skiedra} = 85000(MPa)$$

$$E_{1,saistviela} = E_{2,saistviela} = 3400(MPa)$$

$$v_{12,stiēgra} = 0,2 \quad v_{21,stiēgra} = 0,2$$

$$v_{12,saistviela} = 0,3 \quad v_{21,saistviela} = 0,3$$

$$G_{12,stiēgra} = 34520(MPa)$$

$$G_{12,saistviela} = 1308(MPa)$$

Izmantojot 3. pielikuma formulas (1)-(7) nosaka slāņa deformēšanās raksturlielumus:

$$E_1 = E_{1,(stiēgra)} \cdot k + E_{1,(saistviela)} \cdot (1-k) =$$

$$= 85000 \cdot 0,35 + 3400 \cdot 0,65 = 31960(MPa)$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_3} = \frac{(1 - \sqrt{0,35})85000 + \sqrt{0,35} \cdot 3400}{3400 \cdot (85000(1 - \sqrt{0,35} + 0,35) + 3400(\sqrt{0,35} + 0,35))} -$$

$$\frac{(0,3 \cdot 85000 - 0,2 \cdot 3400)^2 (1 - 0,35) \cdot 0,35}{3400 \cdot 85000(0,35 \cdot 85000 + (1 - 0,35) \cdot 3400)} = 0,0001596 - 0,0000152 =$$

$$= 0,0001444(1 / MPa)$$

$$E_2 = E_3 = \frac{1}{0,0001444} = 6924(MPa)$$

$$v_{21} = v_{21,(skiedra)} \cdot k + v_{21,(saistviela)} \cdot (1-k) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,35 + 0,3 \cdot 0,65 = 0,265$$

$$G_{12} = \frac{\left((1-\sqrt{0,35}) + \sqrt{0,35} \frac{34520}{1308} \right) \cdot 1308}{(1-\sqrt{0,35} + 0,35) + (\sqrt{0,35} - 0,35) \frac{34520}{1308}} = 2937(MPa)$$

Ņemot vērā to, ka ortotropam materiālam ir jāizpildās šādi

sakarībai: $\frac{v_{12}}{E_2} = \frac{v_{21}}{E_1}$, var sarēķināt Puasona koeficientu v_{12} :

$$v_{12} = \frac{v_{21} \cdot E_2}{E_1} = \frac{6924 \cdot 0,265}{31960} = 0,057$$

Izmantojot sakarību (26) sarēķina stinguma matricas C koeficientus:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{31960}{1-0,057 \cdot 0,265} & \frac{0,265 \cdot 6924}{1-0,057 \cdot 0,265} & 0 \\ \frac{0,057 \cdot 31960}{1-0,057 \cdot 0,265} & \frac{6924}{1-0,057 \cdot 0,265} & 0 \\ 0 & 0 & 2937 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32450 & 1863 & 0 \\ 1863 & 7030 & 0 \\ 0 & 0 & 2937 \end{pmatrix} (MPa)$$

Sarēķina stinguma matricas $(C^*)_1, (C^*)_2, (C^*)_3$ pirmajai, otrajai un trešajai lokskaidei loksnes globālajā koordinātu sistēmā x-y:

$$(C^*)_i = T_{(i)}^{-1} \cdot C \cdot R \cdot T_{(i)} \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2 90 & \sin^2 90 & -2 \sin 90 \cdot \cos 90 \\ \sin^2 90 & \cos^2 90 & 2 \sin 90 \cdot \cos 90 \\ \sin 90 \cdot \cos 90 & -\sin 90 \cdot \cos 90 & \cos^2 90 - \sin^2 90 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 32450 & 1863 & 0 \\ 1863 & 7030 & 0 \\ 0 & 0 & 2937 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 90 & \sin^2 90 & 2 \sin 90 \cdot \cos 90 \\ \sin^2 90 & \cos^2 90 & -2 \sin 90 \cdot \cos 90 \\ -\sin 90 \cdot \cos 90 & \sin 90 \cdot \cos 90 & \cos^2 90 - \sin^2 90 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7030 & 1863 & 0 \\ 1863 & 32450 & 0 \\ 0 & 0 & 2937 \end{pmatrix} (MPa)$$

$$\begin{aligned} (C^*)_2 &= T_{(2)}^{-1} \cdot C \cdot R \cdot T_{(2)} \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 21591 & 6363 & 8100 \\ 6363 & 8881 & 2900 \\ 8100 & 2900 & 7440 \end{pmatrix} (MPa) \\ (C^*)_3 &= T_{(3)}^{-1} \cdot C \cdot R \cdot T_{(3)} \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 32450 & 1863 & 0 \\ 1863 & 7030 & 0 \\ 0 & 0 & 2937 \end{pmatrix} (MPa) \end{aligned}$$

Pēc sakarībām (33) nosaka matricu A, B, D koeficientus:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^3 (C^*)_k (z_k - z_{k-1}) = (C^*)_1 \cdot (-0.0025 - (-0.0075)) + \\ &+ (C^*)_2 \cdot (0.0025 - (-0.0025)) + (C^*)_2 \cdot (0.0075 - 0.0025) = \\ &= \begin{pmatrix} 305 & 50 & 40 \\ 50 & 241 & 14,5 \\ 40 & 14,5 & 66,6 \end{pmatrix} (MPa \cdot m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (C^*)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = 0.5 \cdot (C^*)_1 \cdot ((-0.0025)^2 - (-0.0075)^2) + \\ &+ 0.5 \cdot (C^*)_2 \cdot (0.0025^2 - (-0.0025)^2) + 0.5 \cdot (C^*)_2 \cdot (0.0075^2 - 0.0025^2) = \\ &= 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 635 & 0,33 & 0 \\ -0,33 & -635 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (MPa \cdot m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (C^*)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \frac{1}{3} \cdot (C^*)_1 \cdot ((-0.0025)^3 - (-0.0075)^3) + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot (C^*)_2 \cdot (0.0025^3 - (-0.0025)^3) + \frac{1}{3} \cdot (C^*)_2 \cdot (0.0075^3 - 0.0025^3) = \\ &= 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 557 & 56,8 & 8,4 \\ 56,8 & 543 & 3 \\ 8,4 & 3 & 87 \end{pmatrix} (MPa \cdot m^3) \end{aligned}$$

Izmantojot matricas A, B, D un deformēšanās likumu (35) aprēķina loksnes vidusplaknes relatīvās deformācijas, liekumus un vērpusus:

$$\begin{pmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 305 & 50 & 40 & 0,635 & 0,00033 & 0 \\ 50 & 241 & 14,5 & -0,00033 & -0,635 & 0 \\ 40 & 14,5 & 66,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,635 & 0,00033 & 0 & 0,00557 & 0,00057 & 0,000084 \\ -0,00033 & -0,635 & 0 & 0,00057 & 0,00543 & 0,00003 \\ 0 & 0 & 0 & 0,000084 & 0,00003 & 0,00087 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,0005 \\ -0,0001 \\ -0,00028 \\ -0,056 \\ -0,0061 \\ 0,0056 \end{pmatrix}$$

No 4.1. un 4.2 nodaļās aplūkotajiem piemēriem redzams, ka slāņu izvietojums un orientācija atstāj ļoti būtisku iespaidu uz loksnes formu. 4.1 nodaļā aplūkotajai loksnei malējā slāņa šķiedras bija orientētas slīpi, kas izraisīja izteiktu loksnes savērpšanos, taču šajā piemērā malējās šķiedras orientētas slodzes virzienā un perpendikulāri tām, kas izraisa loksnei tieksmi izliekties.

4.3 Mitruma izmaiņas izsaukto spriegumu un deformāciju aprēķins

Koksne un tās materiāli ir higroskopiski materiāli - tādi, kuri no apkārtējās vides uzņem mitrumu vai atdod tai mitrumu, līdz iestājas mitruma maiņas līdzsvars. Koksnē mitrums atrodas trijos veidos - saistītais mitrums, brīvais mitrums un ūdens tvaiki. Vienīgi saistītā mitruma izmaiņa koksnē izsauc tās uzbriedšanu vai rukumu. Slodzi nesošu koksnes konstrukciju mitruma saturs parasti ir līdz 12%. Pie šāda mitruma satura pieņemts, ka koksnē ir tikai saistītais mitrums. Mainoties apkārtējās vides gaisa mitrumam, koksnē sākas mitruma difūzijas procesi (mitrums no apkārtējās vides iekļūst koksnē vai otrādi). Šos, saistīta mitruma difūzijas procesus, parasti skaitliski modelē ar Fika likumiem, kas detalizēti ir aprakstīti, piemēram, literatūrā [3].

Šajā nodaļā tiks parādīts, kādā veidā var noteikt plakanas, slāņainas loksnes mitruma izraisītos spriegumus un deformācijas, gadījumam, kad **mitruma saturs pa loksnes biezumu ir nemainīgs**.

Izmainoties mitruma saturam slāņainā loksnē, tiek radītas rukuma vai uzbrieduma deformācijas. Lai skaitliski noteiktu šo deformāciju lielumu, mitruma radītos iekšējos spriegumus loksnē aizstāj ar ekvivalentu spēku un momentu sistēmu. Šo spēku un momentu vērtības skaitliski sarēķina šādi:

$$N_i^W = \sum_{k=1}^n \left[C_{i,k}^* \right]_k \left\{ \beta_i \right\}_k \Delta W (z_k - z_{k-1})$$

$$M_i^W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[C_{i,k}^* \right]_k \left\{ \beta_i \right\}_k \Delta W (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$
(36)

kur $\left\{ \beta_i \right\} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix}$ – rukuma/uzbriedšanas koeficienti (to

skaitliskās vērtības dotas 2. pielikumā dažādām koka sugām), i-tajam slānim. ΔW – mitruma satura izmaiņa loksnē, %.

Loksnes deformācijas nosaka tāpat, kā gadījumā, ja uz loksni iedarbojas mehānisks spēks - izmantojot vienādojumu (35).

Aprēķina piemērs.

Aprēķināt deformācijas 4.1 nodaļā aprakstītās struktūras loksnei, kuras sākotnējais mitruma saturs 12% un tas palielinās par 2%.

Atrisinājums:

Nosaka uzbriešanas koeficientu vērtības bērza koksnes lobskaidai tās galvenajā koordinātu sistēmā 1-2 (1- aksiālais virziens, 2- tangenciālais):

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0034 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Izmantojot koordinātu transformācijas matricu T, katram slānim aprēķina uzbriešanas koeficientu vērtības loksnes galvenajā koordinātu sistēmā x-y:

1. lobskaidai:

$$\begin{aligned} \{\beta_i\} &= \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 30 & \sin^2 30 & -2 \sin 30 \cdot \cos 30 \\ \sin^2 30 & \cos^2 30 & 2 \sin 30 \cdot \cos 30 \\ \sin 30 \cdot \cos 30 & -\sin 30 \cdot \cos 30 & \cos^2 30 - \sin^2 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0034 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,00085 \\ 0,0025 \\ -0,00147 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Lobskaidai:

$$\{\beta_i\} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0034 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Lobskaidai:

$$\{\beta_i\} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0034 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sarēķina iekšējo spēku komponentes, izmantojot (36) sakarību un iepriekšējā uzdevumā iegūtās elastības matricas katrai lobskaidai:

$$\begin{pmatrix} N_x^w \\ N_y^w \\ N_{xy}^w \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 [C^*]_k \{\beta_i\}_k \Delta W(z_k - z_{k-1}) = \begin{pmatrix} 11359 & 3093 & 5617 \\ 3093 & 2210 & 2306 \\ 5617 & 2306 & 3757 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,00085 \\ 0,0025 \\ -0,00147 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot (-0,0015 - (-0,0045)) + \begin{pmatrix} 502 & 226 & 0 \\ 226 & 18802 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0034 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot (0,0015 - (-0,0015)) + \begin{pmatrix} 18802 & 226 & 0 \\ 226 & 502 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0034 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot (0,0045 - 0,0015) = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,043 \\ 0,03 \end{pmatrix} \left(\frac{MN}{m} \right)$$

Līdzīgā veidā sarēķina momentus, izmantojot izteiksmi (36):

$$\begin{pmatrix} M_x^w \\ M_y^w \\ M_{xy}^w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 [C^*]_k \{\beta_i\}_k \Delta W(z_k^2 - z_{k-1}^2) = \begin{pmatrix} -0,00015 \\ -0,000055 \\ -0,00009 \end{pmatrix} \left(\frac{MN \cdot m}{m} \right)$$

Izmantojot iepriekšējā uzdevumā iegūtās A, B, D matricas un mitruma izraisītās spēku un momentu komponentes, sarēķina mitruma izraisītās deformācijas:

$$\begin{pmatrix} \{e^0\} \\ \{k\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 & 10,6 & 16,85 & 0,067 & -0,0258 & -0,051 \\ 10,6 & 64,5 & 6,9 & -0,028 & -0,0154 & -0,0208 \\ 16,85 & 6,9 & 16,6 & -0,051 & -0,0208 & -0,0258 \\ 0,067 & -0,0258 & -0,051 & 0,00088 & 0,000098 & 0,000164 \\ -0,028 & -0,0154 & -0,0208 & 0,000098 & 0,000122 & 0,000067 \\ -0,051 & -0,0208 & -0,0258 & 0,000164 & 0,000067 & 0,000138 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,043 \\ 0,03 \\ -0,00015 \\ -0,000055 \\ -0,00009 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,000084 \\ 0,00043 \\ 0,0001 \\ -0,213 \\ -0,0036 \\ 0,0075 \end{pmatrix}$$

Maksimālās loksnes vidusplaknes relatīvās deformācijas ir $\varepsilon_y^0 = 0,00043$. Šajā gadījumā tas skaidrojams ar to koksnes īpašību, ka tangenciālajā virzienā tā uzbriest daudz vairāk kā aksiālā virzienā. Atšķirībā no iepriekš aplūkotā gadījuma, kad uz loksni iedarbojās vienmērīgi izkliedēts spēks loksnes garenass virzienā, šajā gadījumā loksnei nav tendence savērties - vērpums ir salīdzinoši niecīgs $k_{xy} = 0,0075(\text{rad}/m)$. Loksne relatīvi daudz izliecas y-ass virzienā, jo liekuma rādiuss ir relatīvi neliels $R_y = 1/k_y = 4,7(m)$. No šī piemēra redzams, ka mitruma izmaiņa loksnes ar nesimetrisku struktūru pret vidusplakni izsauc formas un izmēru izmaiņas.

5. SLĀŅAINU KOKSNES MATERIĀLU UN DIVOS PERPENDIKULĀROS VIRZIENOS STIEGROTU PLASTMASU STIPRĪBA

Anizotropu materiālu stiprības aprēķinos galvenokārt tiek risināti šādi uzdevumi:

- noteikt materiāla stiprības raksturlielumus pagrieztā koordinātu sistēmā attiecībā pret materiāla galvenajām asīm.
- novērtēt anizotropa materiāla stiprību plakniskā un telpiskā spriegumstāvoklī.

Stiprības teorija ir balstīta uz stiprības kritēriju - tas ir kritērijs, kurš nosaka materiāla stiprības robežas. Pastāv fizikālie un fenomenoloģiskie stiprības kritēriji. Šeit tiks aplūkoti tikai fenomenoloģiskie stiprības kritēriji. Tie ir balstīti uz *stiprības virsmu*³ aprakstu polinomu veidā. Materiāla stiprību konkrētā punktā nosaka šī punkta robežspriegumu tenzors. Tas tiek saukts par stiprības tenzoru. Tenzora komponentes ir atkarīgas no materiāla īpašībām, slogojuma veida un laika, temperatūras un mitruma izmaiņas. Šajā nodaļā dotās tenzora komponentes ir iegūtas 20⁰ C temperatūrā pie 12% koksnes mitruma, īslaicīgam slogojuma gadījumam. Svarīgi ņemt vērā, ka fenomenoloģiskie stiprības kritēriji attiecināmi uz viendabīgu, anizotropu materiālu. Kritēriju parametri tiek noteikti eksperimentāli, vai analītiski vienkāršāko slogojumu gadījumos.

Vispārīgā gadījumā fenomenoloģiskie stiprības kritēriji tiek veidoti sešu dimensiju spriegumu telpā. Tomēr praktiski, tie tiek vienkāršoti konkrētajam slogojuma gadījumam.

Šajā nodaļā tiks izklāstīta stiprības teorija ortotropam materiālam. 3. nodaļā tika minēts, ka saplākšņa loksnes ar simetrisku struktūru pret to vidusplakni, divos perpendikulāros virzienos stiegotas plastmasas loksnes, un relatīvi maza šķērsriezuma koksnes elementi var tikt uzskatīti par ortotropiem materiāliem.

Ar detalizētu šīs tēmas izklāstu stiegotiem plastikiem, kur stiprība noteikta izmantojot saistvielas un stiegru stiprības īpašības, skatīt literatūrā [15,14].

³ Stiprības virsma - virsma, kas nosaka stiprības robežu (tādu spriegumu kombināciju, pie kuras, ja palielina kaut vienas spriegumu komponentes vērtību iestājas materiāla sabrukums).

5.1 Ortotropa materiāla stiprība patvaļīgā slogojuma virzienā

Lai noteiktu materiāla stiprību slogojot to noteiktā virzienā, izmanto ceturrtā ranga stiprības tenzoru, kuru definē ar stiprības tenzora koeficientiem - a_{iklm} . Šo koeficientu vērtības pagrieztā koordinātu sistēmā var noteikt izmantojot virzienu kosinusus $C_{i'i}$ (kosinuss leņķim starp asīm ar indeksu i un i'):

$$a_{i'k'l'm'} = a_{iklm} C_{i'i} C_{k'k} C_{l'l} C_{m'm} \quad (37)$$

Tenzora koeficientu a_{iklm} vērtības galvenajās elastīgās simetrijas asīs 1,2,3 ortotropam materiālam ir šādas:

$$\begin{cases} a_{1111} = \frac{1}{R_{1,t(c)}}; a_{2222} = \frac{1}{R_{2,t(c)}}; a_{3333} = \frac{1}{R_{3,t(c)}}; \\ 4a_{1212} = \frac{1}{R_{12}}; 4a_{2323} = \frac{1}{R_{23}}; 4a_{3131} = \frac{1}{R_{31}}; \end{cases} \quad (38)$$

kur $R_{1,t}, R_{2,t}, R_{3,t}, R_{1,c}, R_{2,c}, R_{3,c}$ – robežstiprība pie stiepes (indekss t) un spiedes (indekss c) materiāla elastīgās simetrijas asu 1, 2, 3 virzienos; R_{12}, R_{23}, R_{31} – robežstiprība pie tūrās bīdes attiecīgajās plaknēs, ko nosaka indeksi.

Līdzīgi kā elastīgo raksturlielumu tenzoru, var pierakstīt matricu formā arī stiprības tenzoru A ērtības labad pieraksta matricu formā:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3131} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Lai saīsinātu pierakstu, tenzora komponentes ar četriem indeksiem aizstāj ar divu indeksu komponentēm

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$$

Pārējos stiprības tenzora koeficientus ir sarežģītāk aprēķināt, jo to aprēķina formulas ir atkarīgas no spriegumu veida (stiepe, spiede, bīde):

1. Ja pa elastīgās simetrijas asīm i un k darbojas stiepes normālspriegumi un bīde, tad:

$$A_{ik} = \frac{4}{R_{ik,t}^{(45)}} - \frac{1}{R_{i,t}} - \frac{1}{R_{k,t}} - \frac{1}{R_{ik}}, (i \neq k) \quad (40)$$

2. Ja pa elastīgās simetrijas asīm darbojas spiedes normālspriegumi un bīde, tad:

$$A_{ik} = \frac{\sqrt{3}}{R_{ik,c}} - \frac{1}{R_{i,c}} - \frac{1}{R_{k,c}}, (i \neq k) \quad (41)$$

3. Ja pa elastīgās simetrijas asi ar lielāko stiprību i darbojas stiepes spriegumi un pa perpendikulāro asi - k ar mazāko stiprību spiedes spriegumi, tad:

$$A_{ik} = \frac{1}{R_{i,t}} - \frac{1}{R_{k,c}} - \frac{1}{R_{ik}^{+(45)}}, (i \neq k) \quad (42)$$

4. Ja pa elastīgās simetrijas asi ar lielāko stiprību i darbojas spiedes spriegumi un pa perpendikulāro asi - k ar mazāko stiprību stiepes spriegumi, tad:

$$A_{ik} = \frac{1}{R_{i,c}} - \frac{1}{R_{k,t}} - \frac{1}{R_{ik}^{-(45)}}, (i \neq k) \quad (43)$$

kur $R_{12,t}^{(45)}, R_{23,t}^{(45)}, R_{31,t}^{(45)}, R_{12,c}^{(45)}, R_{23,c}^{(45)}, R_{31,c}^{(45)}$ ⁴ - robežstiprība diagonālā virzienā (45° leņķī pret elastīgās simetrijas asīm, ko norāda indeksi) stiepē un spiedē; $R_{ik}^{\pm(45)}$ - robežstiprība gadījumam, ja 45° leņķi pret elastīgās simetrijas asīm, ko norāda indeksi darbojas viens bīdes spriegums; $R_{ik,c}$ - stiprība pie divasīgas, proporcionālas spiedes asu i un k virzienos.

⁴ Indeksu t nejaukt ar tangenciālo virzienu, šajā gadījumā tas iegūts no angļu vārda *tension* un indekss c no vārda *compression*.

Lai noteiktu materiālam stiprību raksturojošos lielumus pagrieztā koordinātu sistēmā x-y-z, var lietot koordinātu pagriešanas matricas m^T un m (analoģiski kā stinguma un padevīguma matricām):

$$A^* = m^T \cdot A \cdot m$$

$$m^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{21}^2 & a_{31}^2 & a_{21}a_{31} & \dots \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 & a_{32}^2 & a_{22}a_{32} & \dots \\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & a_{33}^2 & a_{23}a_{33} & \dots \\ 2a_{12}a_{13} & 2a_{22}a_{23} & 2a_{32}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23} & \dots \\ 2a_{13}a_{11} & 2a_{23}a_{21} & 2a_{33}a_{31} & a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21} & \dots \\ 2a_{11}a_{12} & 2a_{21}a_{22} & 2a_{31}a_{32} & a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22} & \dots \\ \dots & a_{31}a_{11} & a_{11}a_{21} & & \\ \dots & a_{32}a_{12} & a_{12}a_{22} & & \\ \dots & a_{33}a_{13} & a_{13}a_{23} & & \\ \dots & a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13} & & \\ \dots & a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11} & & \\ \dots & a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} & & \end{bmatrix}, \quad (44)$$

kur koeficienti a_{ik} ir kosinusu matricas koeficienti:

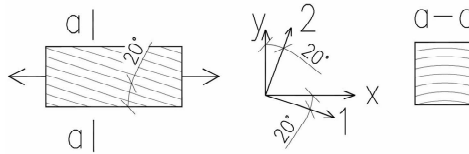
$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x;1) & \cos(x;2) & \cos(x;3) \\ \cos(y;1) & \cos(y;2) & \cos(y;3) \\ \cos(z;1) & \cos(z;2) & \cos(z;3) \end{bmatrix} \quad (45)$$

No sakarības (44) var iegūt robežstiprību pie vienasīgas stiepes (spiedes) ortotropam materiālam patvaļīgi orientētas ass x virzienā:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{x,t}} &= \frac{\cos^4(1;x)}{R_{1,t}} + \frac{\cos^4(2;x)}{R_{2,t}} + \frac{\cos^4(3;x)}{R_{3,t}} + \\ &+ \left(\frac{4}{R_{12,t}^{(45)}} - \frac{1}{R_{1,t}} - \frac{1}{R_{2,t}} \right) \cdot \cos^2(1;x) \cdot \cos^2(2;x) + \\ &+ \left(\frac{4}{R_{23,t}^{(45)}} - \frac{1}{R_{2,t}} - \frac{1}{R_{3,t}} \right) \cdot \cos^2(2;x) \cdot \cos^2(3;x) + \\ &+ \left(\frac{4}{R_{31,t}^{(45)}} - \frac{1}{R_{3,t}} - \frac{1}{R_{1,t}} \right) \cdot \cos^2(3;x) \cdot \cos^2(1;x) \end{aligned} \quad (46)$$

Aprēķina piemērs:

Jānosaka robežstiprība priedes koksnei pie stiepes 20° leņķī pret koksnes šķiedrām (skat. 18. attēlu).



18. attēls. Shematisks stiepes elementa attēlojums, koordinātu sistēmas.

3. Tabula.

Priedes un bērza koksnes robežstiprības pie stiepes un spiedes[1]

Suga		R_1 MPa	R_2 MPa	R_3 MPa	$R_{12}^{(45)}$, MPa	$R_{31}^{(45)}$, MPa	$R_{23}^{(45)}$, MPa
Priede	Spiede	44,6	3,6	6,7	8	15,2	2,7
	Stiepe	59	4,8	4,8	10	10	4,8
Bērzs	Spiede	76,7	12,3	6,5	36	30,7	7,2
	Stiepe	168,6	10,9	6,9	17,1	12,9	7,3

*virziens 1 sakrīt ar koksnes aksiālo virzienu, 2-radiālo, 3- tangenciālo.

Izmantojot tabulas 3 datus atbilstoši sakarībai (46) iegūstam:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{x,t}} &= \frac{\cos^4(20)}{59} + \frac{\cos^4(70)}{4,8} + \frac{\cos^4(90)}{4,8} + \\ &+ \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{59} - \frac{1}{4,8} \right) \cdot \cos^2(20) \cdot \cos^2(70) + \\ &+ \left(\frac{4}{4,8} - \frac{1}{4,8} - \frac{1}{4,8} \right) \cdot \cos^2(70) \cdot \cos^2(90) + \\ &+ \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{4,8} - \frac{1}{59} \right) \cdot \cos^2(90) \cdot \cos^2(20) = 0,034 \left(\frac{1}{MPa} \right) \\ R_{x,t} &= \frac{1}{0,034} = 29,4(MPa) \end{aligned}$$

Tātad, izmantojot koksnes īpašības galveno asu virzienos, ir iegūta prognozējamā stiprība stieptam elementam (att. 18).

5.2 Divasīgs spriegumstāvoklis

Koksnes vai stiegotu plastmasu konstrukcijās bieži veidojas divasīgs spriegumstāvoklis - visas galvenās spriegumu komponentes atrodas vienā plaknē. Līdz ar to rodas nepieciešamība noteikt, kādas var būt pieļaujamas spriegumu vērtību kombinācijas šajā plaknē pie kurām materiāls nesagrūst. Lai padarītu aprēķinus vieglākus, zīmē tā saucamās spriegumu stiprības virsmas - virsma trīs dimensiju koordinātu sistēmā, kurā uz divām asīm atliek abu plaknes normālspriegumu vērtības, bet uz trešās ass tangenciālo spriegumu vērtības. Jebkura punkta uz šīs virsmas trīs koordinātas nosaka robežgadījumu (spriegumu kombināciju), kad palielinoties kaut vienai sprieguma komponentes absolūtajai vērtībai, iestājas materiāla sabrukums.

Spriegumu virsmas parasti definē ar otrās vai ceturtās kārtas algebrisku polinomu. Vienkāršākiem materiāliem, tādiem kā tērauds, parasti pietiek ar otrās kārtas vienādojumu, taču koksne ir strukturāli sarežģīts materiāls un, lai konstruētu pietiekami precīzu stiprības virsmu, izvēlas ceturtās kārtas algebrisku vienādojumu [1]:

$$(a_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm})^2 - \frac{(\sigma_{ik}\delta_{ik})^2 + \sigma_{ik}\sigma_{ik}}{2} = 0 \quad , \quad (47)$$

kur $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$ - Kronekera simbols, bet $i, k = 1, 2, 3$

Izvērstā veidā vienādojumam (47) ir šāda forma:

$$\begin{aligned} a_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm} &= a_{1111}\sigma_x^2 + a_{2222}\sigma_y^2 + a_{3333}\sigma_z^2 + 2a_{1122}\sigma_x\sigma_y + \dots \\ &\dots + 2a_{2233}\sigma_y\sigma_z + 2a_{1133}\sigma_x\sigma_z + 4a_{1212}\tau_{xy}^2 + 4a_{2323}\tau_{yz}^2 + 4a_{3131}\tau_{zx}^2 \\ \sigma_{ik}\sigma_{ik} &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 \\ \sigma_{ik}\delta_{ik} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \end{aligned} \quad (48)$$

Tā kā vispārīgajā gadījumā, lai uzzīmētu spriegumu virsmu, jālieto 6 dimensiju telpa, ko nav iespējams vizuāli attēlot, turpmāk, runājot par spriegumu virsmām, šajā nodaļā sapratīsim plaknisku spriegumstāvokli, kas raksturojas ar 3 spriegumu komponentēm.

Konstruējot spriegumu virsmas plakniskam spriegumstāvoklim, telpu sadala 4 oktantos, katrā no tiem spriegumu virsmas vienādojumam ir atšķirīgi koeficienti (aprēķināmi pēc vienas no izteiksmēm (40)-(43)), jo mainās spriegumu zīmes (stiepe mainās uz spiedi un otrādi).

5.2.1 Stiprības virsma divasīgā stiepē

Pirmajā oktantā, kad darbojas stiepe divos virzienos un tangenciālie spriegumi, vienādojums (47) novienkāršojas (jo pārējās spriegumu komponentes ir nulle) un stiprības virsmu nosaka sakarība:

$$\frac{\sigma_x^2 + c \cdot \sigma_y^2 + e \cdot \sigma_x \sigma_y + d \cdot \tau_{xy}^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2}} = \frac{R_{1,t}}{k}, \quad (49)$$

kur $c = \frac{R_{1,t}}{R_{2,t}}$; $a = \frac{R_{1,t}}{R_{12,t}^{(45)}}$; $d = \frac{R_{1,t}}{R_{12}}$; $e = 4a - c - d - 1$; asis 1 un 2 atrodas

tajā pašā plaknē kur asis x un y; k- drošuma koeficients.

Gadījumā, ja spriegumu plaknē nav tangenciālo spriegumu, un normālspriegumi darbojas materiāla galveno asu virzienos 1 un 2, stiprības virsmas vienādojums (49) reducējas uz šādu:

$$\frac{\sigma_1^2 + c \cdot \sigma_2^2 + e \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2}} = \frac{R_{1,t}}{k}$$

Iepriekšējās sakarības grafiks ir plaknes līkne, jeb stiprības līkne, jo ir tikai divi mainīgie lielumi.

Aprēķina piemērs:

Konstruēt stiprības līkni priedes koksnei, ja tajā darbojas divi stiepes normālspriegumi un noteikt vai koksnē iestājas sabrukums, ja šķiedru virzienā tajā ir 10 MPa spriegums un perpendikulāri tām (radiālajā virzienā) - 2 MPa.

Atrisinājums:

Robežstiprības vērtības izmanto tās pašas, kādas iepriekšējā uzdevumā:

$$R_{1,t} = 59 \text{ MPa}$$

$$R_{2,t} = 4,8 \text{ MPa}$$

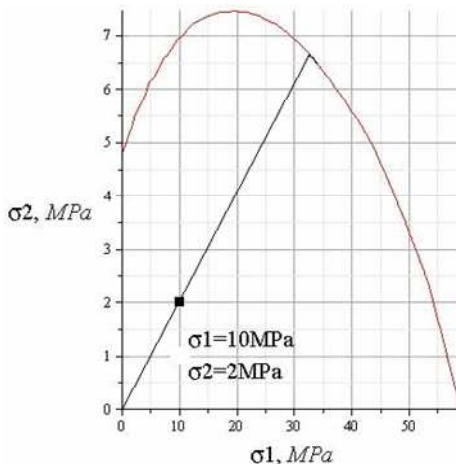
$$R_{12,t}^{(45)} = 10 \text{ MPa}$$

$$R_{12} = 7,5 \text{ MPa}$$

Līdz ar to stiprības virsmas vienādojums priedes koksnei ir:

$$\frac{\sigma_1^2 + \frac{59}{4,8} \cdot \sigma_2^2 + \left(4 \cdot \frac{59}{10} - \frac{59}{4,8} - \frac{59}{7,5} - 1\right) \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2}} = \frac{59}{1}$$

Šis vienādojums grafiski attēlots 19. attēlā.



19. attēls. Stiprības līkne priedes koksnei, pie divasīgas stiepes radiālajā un aksiālajā virzienā.

No 19. attēla redzams, ka dotajā gadījumā koksnē sabrukums neiestājas, jo dotais spriegumstāvokļa punkts atrodas zonā, ko norobežo stiprības līkne un koordinātu asis. Līknes forma liecina par to, ka tā izmantojama tikai proporcionāla slogojuma gadījumā, kad $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = const$. Tas

nozīmē to, ka, piemēram, ja gribam sasniegt stiprības virsmas punktu ar koordinātēm ($\sigma_1 = 33MPa, \sigma_2 = 6.5MPa$), varam rīkoties divējādi:

- 1 - pielikt abu spriegumu vērtības pakāpeniski un virzīties pa 19. attēlā parādīto taisni
- 2 - pielikt $\sigma_2 = 6.5MPa$ un pēc tam otru sprieguma komponenti $\sigma_1 = 33MPa$

Pirmajā gadījumā neiestājas materiāla sabrukums, taču otrajā ja pieliekam spriegumu $\sigma_2 = 6.5MPa$, tad jau ir iestājies materiāla sabrukums.

5.2.2 Stiprības virsma divasīgā spiedē

Trešajā oktantā materiālā darbojas divas spiedes normālspriegumu komponentes un viena bīdes sprieguma komponente. Stiprības līkni gadījumā, ja nav bīdes spriegumu, apraksta šāds vienādojums:

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{R_{1,c} \sqrt{3}}{R_{12,c}} - c - 1 \right)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2}} = \frac{R_{1,c}}{k} \quad (50)$$

Šo vienādojumu iegūst no vispārīgā stiprības virsmas vienādojuma (47), ievietojot nulles to spriegumu vietās, kuri nerodas pie dotā sloģojuma veida.

5.3 Trīsasīgs spriegumstāvoklis

Šajā gadījumā uz materiālu darbojas sešas dažādas spriegumu komponentes - trīs normālspriegumi un trīs tangenciālie spriegumi. Stiprības virsmu apraksta šāds vienādojums:

$$\frac{\sigma_x^2 + c \cdot \sigma_y^2 + b \cdot \sigma_z^2 + d \cdot \tau_{xy}^2 + p \cdot \tau_{yz}^2 + r \tau_{zx}^2 + s \cdot \sigma_x \sigma_y + t \cdot \sigma_y \sigma_z + f \cdot \sigma_z \sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x}} = \frac{R_{x,t(c)}}{k}, \quad (51)$$

$$\text{kur } c = \frac{R_{x,t(c)}}{R_{y,t(c)}}; \quad b = \frac{R_{x,t(c)}}{R_{z,t(c)}}; \quad d = \frac{R_{x,t(c)}}{R_{xy}}; \quad p = \frac{R_{x,t(c)}}{R_{yz}};$$

$$r = \frac{R_{x,t(c)}}{R_{zx}}; \quad s = \frac{4 \cdot R_{x,t(c)}}{R_{xy,t(c)}^{(45)}} - c - d - 1; \quad t = \frac{4 \cdot R_{x,t(c)}}{R_{yz,t(c)}^{(45)}} - c - b - p;$$

$$f = \frac{4 \cdot R_{x,t(c)}}{R_{zx,t(c)}^{(45)}} - b - r - 1; \quad R_{x,t(c)} - \text{norāda robežstiprību stiepē virzienā } x, \text{ ja}$$

ir indekss t, vai spiedē, ja ir indekss c; k- drošuma koeficients, līdzīgi arī pārējiem lielumiem.

Tā kā vienādojumā (51) ir 6 mainīgie, tad spriegumu virsmu uzzīmēt nav iespējams. Apskatīsim gadījumu, kad darbojas tikai trīs normālspriegumu komponentes materiāla galvenajās asīs -1,2,3, tad vienādojums (51) reducējas uz šādu:

$$\frac{\sigma_1^2 + c \cdot \sigma_2^2 + b \cdot \sigma_3^2 + s \cdot \sigma_1 \sigma_2 + t \cdot \sigma_2 \sigma_3 + f \cdot \sigma_3 \sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1}} = \frac{R_{1,t(c)}}{k} \quad (52)$$

Aprēķina piemērs:

Konstruēt stiprības virsmu priedes koksnes šķautnim, uz kuru darbojas trīs normālspriegumu komponentes un noteikt, vai neiestājas sabrukums, ja šo normālspriegumu vērtības ir šādas: aksiālā virzienā stiepe - 15 MPa, radiālā virzienā spiede - 4 MPa, tangenciālā virzienā spiede - 2 MPa.

Atrisinājums:

Izmanto tādas pašas robežstiprības vērtības kā iepriekšējā piemērā:

$$\begin{array}{lll} R_{1,t} = 59 \text{MPa} & R_{12,t}^{(45)} = 10 \text{MPa} & R_{12} = 7,5 \text{MPa} \\ R_{2,c} = 3,6 \text{MPa} & R_{31,t}^{(45)} = 10 \text{MPa} & R_{23} = 3,75 \text{MPa} \\ R_{3,c} = 6,7 \text{MPa} & R_{23,c}^{(45)} = 2,7 \text{MPa} & R_{31} = 7,3 \text{MPa} \end{array}$$

Izmantojot stiprības raksturlielumus, aprēķina stiprības vienādojuma konstantes:

$$c = \frac{R_{1,t}}{R_{2,c}} = \frac{59}{3,6} = 16,4 \qquad b = \frac{R_{1,t}}{R_{3,c}} = \frac{59}{6,7} = 8,8$$

$$d = \frac{R_{1,t}}{R_{12}} = \frac{59}{7,5} = 7,87 \qquad p = \frac{R_{1,t}}{R_{23}} = \frac{59}{3,75} = 15,73$$

$$r = \frac{R_{1,t}}{R_{31}} = \frac{59}{7,3} = 8,1$$

$$s = \frac{4 \cdot R_{1,t}}{R_{12,t}^{(45)}} - c - d - 1 = \frac{4 \cdot 59}{10} - 16,4 - 7,87 - 1 = -1,67$$

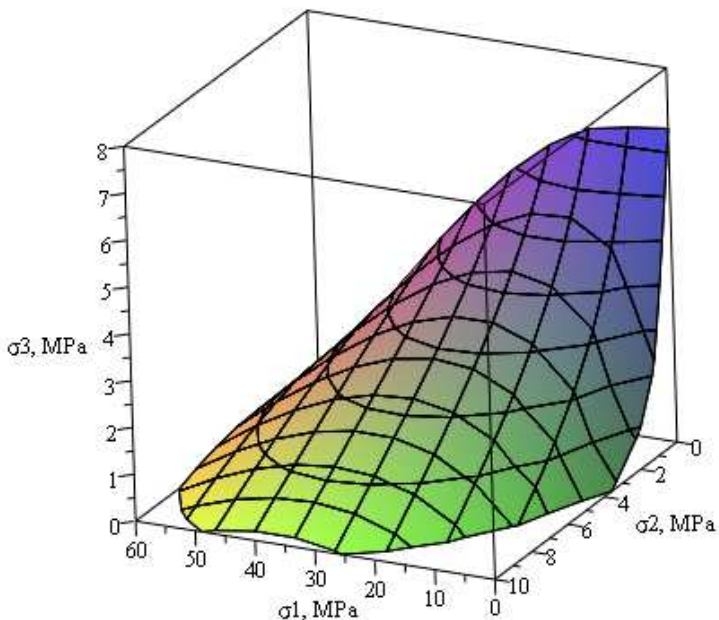
$$t = \frac{4 \cdot R_{1,t}}{R_{23,t}^{(45)}} - c - b - p = \frac{4 \cdot 59}{2,7} - 16,4 - 8,8 - 15,73 = 46,5$$

$$f = \frac{4 \cdot R_{1,t}}{R_{31,t}^{(45)}} - b - r - 1 = \frac{4 \cdot 59}{10} - 8,8 - 8,1 - 1 = 5,7$$

Ievietojot aprēķinātos koeficientus vienādojumā (52), iegūstam:

$$\frac{\sigma_1^2 + 16,4 \cdot \sigma_2^2 + 8,8 \cdot \sigma_3^2 - 1,67 \cdot \sigma_1 \sigma_2 + 46,5 \cdot \sigma_2 \sigma_3 + 5,7 \cdot \sigma_3 \sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1}} = \frac{59}{1}$$

Sprieguma virsmas grafiku zīmē, izmantojot datorprogrammu Maple 13 (var izmantot arī citas programmas, piemēram, MathCad, Matlab):



20. attēls. Stiprības virsma trīsāsīgam spriegumstāvoklim- σ_1 – stiepes spriegumi, σ_2, σ_3 – spiedes spriegumi .

Ievietojot stiprības virsmas vienādojumā sprieguma vērtības $\sigma_1 = 15\text{MPa}, \sigma_2 = -4\text{MPa}, \sigma_3 = -2\text{MPa}$, virsmas vienādojuma kreisā puse ir mazāka par labo, līdz ar to materiāls netiek sagrauts.

1. PIELIKUMS.

1.1 Mazu izmēru koksnes standartparaugu ar ideālu struktūru elastīgie raksturlielumi

1. Tabula.

Elastības moduļi pie 12% mitruma [10]

Suga	Pie spiedes, MPa			Pie stiepes, MPa		
	E_a	E_r	E_t	E_a	E_r	E_t
Priede	12300	700	580	12300	590	510
Egle	14800	670	440	14900	700	500
Bērzs	16400	680	530	18700	680	500
Ozols	14600	1370	990	14600	1180	910

Lai atrastu elastības moduļus pie savādāka mitruma satura, kas nepārsniedz 30% var lietot šādu formulu:

$$E_W = E_{12} - \alpha(W - 12), \text{ kur}$$

E_W – Elastības modulis pie mitruma satura W ,

E_{12} – Elastības modulis pie 12% mitruma (skat. 1. tabulu),

α – Koeficients, pie stiepes vai spiedes šķiedru virzienā- 200 MPa, pie stiepes vai spiedes perpendikulāri šķiedrām- 25MPa.

2. Tabula.

Bīdes moduļi pie 12% mitruma [10]

Suga	G_{ra} , MPa	G_{ta} , MPa	G_{rt} , MPa
Priede	1230	800	-
Egle	-	-	50
Bērzs	1540	890	230
Ozols	1410	1000	470

Lai atrastu bīdes moduļus pie cita mitruma satura, kas nepārsniedz 30%, var lietot šādu formulu:

$$G_W = G_{12} - \alpha(W - 12), \text{ kur}$$

G_W – Elastības modulis pie mitruma satura W ,

G_{12} – Elastības modulis pie 12% mitruma (skat. 2. tabulu),

α – Koeficients, kuru rēķinot G_{ra} , G_{ta} visām koka sugām – 30MPa, priekš lapu koku sugām rēķinot G_{rt} – 10MPa, skuju koku sugām G_{rt} , mainoties mitrumam praktiski nemainās ($\alpha=0$).

3. Tabula.

Puasona koeficienti * pie 10-15% mitruma [10].

Suga	μ_{ra}	μ_{ra}	μ_{ar}	μ_{tr}	μ_{at}	μ_{rt}
Priede	0,490	0,410	0,030	0,790	0,037	0,380
Egle	0,440	0,411	0,017	0,480	0,031	0,250
Ozols	0,430	0,410	0,070	0,830	0,090	0,340
Bērzs	0,580	0,450	0,043	0,810	0,040	0,490

*Pirmais indekss norāda šķērsdeformāciju virzienu, otrais pieliktā spēka virzienu.

1.2. Žāgmateriālu elastīgie raksturlielumi (pēc BS EN 338: 2003)

Stiprības klase	Raksturīgās stiprības vērtības (N/mm ²)						Stinguma raksturlielumi (kN/mm ²)				Blīvums (kg/m ³)	
	Liece (f _{mk})	Stiepe (f _{0,0k})	Stiepe (f _{1,90k})	Spiede (f _{c,0k})	Spiede (f _{c,90k})	Bīde (f _{v,k})	E _{0,mean}	E _{0,05}	E _{90,mean}	G _{mean}	P _k	P _{mean}
Mīkstā koksne	C14	8	0,4	16	2,0	1,7	7,0	4,7	0,23	0,44	290	350
	C16	10	0,5	17	2,2	1,8	8,0	5,4	0,27	0,50	310	370
	C18	11	0,5	18	2,2	2,0	9,0	6,0	0,30	0,56	320	380
	C20	12	0,5	19	2,3	2,2	9,5	6,4	0,32	0,59	330	390
	C22	13	0,5	20	2,4	2,4	10,0	6,7	0,33	0,63	340	410
	C24	14	0,5	21	2,5	2,5	11,0	7,4	0,37	0,69	350	420
	C27	16	0,6	22	2,6	2,6	11,5	7,7	0,38	0,72	370	450
	C30	18	0,6	23	2,7	2,7	12,0	8,0	0,40	0,75	380	460
	C35	21	0,6	25	2,8	2,8	13,0	8,7	0,43	0,81	400	480
	C40	24	0,6	26	2,9	2,9	14,0	9,4	0,47	0,88	420	500
Cietā koksne	C45	27	0,6	27	3,1	3,8	15,0	10,0	0,50	0,94	440	520
	C50	30	0,6	29	3,2	3,8	16,0	10,7	0,53	1,00	460	550
	D30	30	0,6	23	8,0	3,0	10,0	8,0	0,64	0,60	530	640
	D35	35	0,6	25	8,4	3,4	10,0	8,7	0,69	0,65	560	670
	D40	40	0,6	26	8,8	3,8	11,0	9,4	0,75	0,70	590	700
D50	50	0,6	29	9,7	4,6	14,0	11,8	0,93	0,88	650	780	
D60	60	0,6	32	10,5	5,3	17,0	14,3	1,13	1,06	700	840	
D70	70	0,6	34	13,5	6,0	20,0	16,8	1,33	1,25	900	1080	

* indekss k- raksturīgā vērtība, t- stiepe, c- spiede, 0- paralēli šķiedrām, 90- perpendikulāri šķiedrām, v- bīde, mean- vidējā vērtība
Raksturīgie sloģojumu veidi un to raksturlielumi:

	Liece paralēli šķiedrām: f _{mk} , E _{0,mean} , E _{0,05} , G _{mean} , f _{v,k}		Stiepe/spiede paralēli šķiedrām: f _{t,0,k} , f _{c,0,k} , E _{0,mean} , E _{0,05}		Stiepe/spiede perpendikulāri šķiedrām: f _{t,90,k} , f _{c,90,k} , E _{90,mean}
---	--	---	--	---	---

Lai iegūtu aprēķina vērtības, jālieto drošuma koeficienti priekš katra konkrētā gadījumā.

2. PIELIKUMS.

Mazu izmēru koksnes standartparaugu ar ideālu struktūru svarīgākās fizikālās īpašības

1. Tabula.

Koksnes blīvums pie 12% mitruma [10].

Suga	Blīvums, kg/m ³	Suga	Blīvums, kg/m ³
Lapegle	660	Kļava	690
Parastā priele	500	Parastais osis	680
Egle	445	Dižskābārdis	670
Ciedrs	435	Goba	650
Sibīrijas baltegle	375	Bērzs	630
Skābārdis	800	Griekijas riekstkoks	590
Baltā akācija	800	Alksnis	520
Bumbieris	710	Apse	495
Ozols	690	Liepa	495

Lai sarēķinātu koksnes blīvumu pie mitruma W robežās no 0 līdz 30% var lietot šādas formulas [10]:

- Baltajai akācijai, bērzam, dižskābārdim, skābārdim un lapeglei:

$$\rho_w = \frac{\rho_{12}}{1,048 - 0,004 * W}$$

- Pārējām koksnes sugām:

$$\rho_w = \frac{\rho_{12}}{1,060 - 0,005 * W}$$

Izmantojot šīs formulas mitrums ir jāliek %, blīvums pie 12% mitruma- ρ_{12} jāliek kg/m³ mērvienībās, tad rezultāts ir kg/m³.

Uzbriešanas un rukuma koeficienti* [10].

Suga	Rukuma koeficients K_y un uzbrieduma koeficients K_p , %					
	Tilpuma		Radiālais		Tangenciālais	
	K_y	K_p	K_y	K_p	K_y	K_p
Lapegle	0,52	0,61	0,19	0,20	0,35	0,39
Priede	0,44	0,51	0,17	0,18	0,28	0,31
Egle	0,43	0,50	0,16	0,17	0,28	0,31
Sibīrija baltegle	0,39	0,44	0,11	0,11	0,28	0,31
Ciedrs	0,37	0,42	0,12	0,12	0,26	0,28
Bērzs	0,54	0,64	0,26	0,28	0,31	0,34
Dižskabārdis	0,47	0,55	0,17	0,18	0,32	0,35
Osis	0,45	0,52	0,18	0,19	0,28	0,31
Ozols	0,43	0,50	0,18	0,19	0,27	0,29
Apse	0,41	0,47	0,14	0,15	0,28	0,30

*Lai aprēķinātu koksnes izmēru a_w pie mitruma W , ja zināms, ka parauga izmēri pie mitruma W_0 ir a_{w0} , tad var lietot šādu formulu [18] (analoģiski pie uzbrieduma):

$$a_w = a_{w0} - \frac{K_y}{100} * a_{w0} * (W_0 - W)$$

3. PIELIKUMS.

Plastmasu mehāniskās īpašības.

1. Tabula

Dažādu materiālu šķiedru īpašības [2,14]

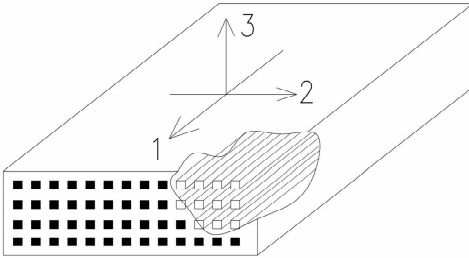
Īpašība	Oglekļšķiedra	Stiklšķiedra	Aramīda šķiedra
E_1 (garenvirzienā), GPa	230	85	124
E_2 (šķērsvirzienā), GPa	22	85	8
ν_{21}	0,3	0,2	0,36
ν_{12}	0,35	0,2	0,37
G_{12} , GPa	22	35,42	3
Termiskās izplešanās koeficients garenvirzienā, $\frac{\mu m}{m \cdot ^\circ C}$	-1,3	5	-5
Termiskās izplešanās koeficients šķērsvirzienā, $\frac{\mu m}{m \cdot ^\circ C}$	0,7	5	1
Stiepes stiprība garenvirzienā $R_{1,t}$, MPa	2067	1550	1379
Spiedes stiprība garenvirzienā $R_{1,c}$, MPa	1999	1550	276
Stiepes stiprība šķērsvirzienā $R_{2,t}$, MPa	77	1550	7
Spiedes stiprība šķērsvirzienā $R_{2,c}$, MPa	42	1550	7
Bīdes stiprība R_{12} , MPa	36	35	21
Relatīvais blīvums $\rho_{šķiedra} / \rho_{ūdens}$	1,8	2,5	1,4

Dažādu saistvielu īpašības [2,14]

Īpašība	Epoksīda sveķi	Alumīnijs	Poliamīds
E_1 (garenvirzienā), GPa	3,4	71	3,5
E_2 (šķērsvirzienā), GPa	3,4	71	3,5
ν_{21}	0,3	0,3	0,35
ν_{12}	0,3	0,3	0,35
G_{12} , GPa	1,308	27	1,3
Termiskās izplešanās koeficients garenvirzienā, $\frac{\mu m}{m \cdot ^\circ C}$	63	23	90
Termiskās izplešanās koeficients šķērsvirzienā, $\frac{\mu m}{m \cdot ^\circ C}$	0,33	0	0,33
Stiepes stiprība garenvirzienā $R_{1,t}$, MPa	72	276	54
Spiedes stiprība garenvirzienā $R_{1,c}$, MPa	102	276	108
Stiepes stiprība šķērsvirzienā $R_{2,t}$, MPa	72	276	54
Spiedes stiprība šķērsvirzienā $R_{2,c}$, MPa	102	276	108
Bīdes stiprība R_{12} , MPa	34	138	54
Relatīvais blīvums $\rho_{\text{šķiedra}} / \rho_{\text{ūdens}}$	1,2	2,7	1,2

Lai aprēķinātu kompozīta materiāla, kas sastāv no šķiedrām un saistvielas, deformatīvos raksturotājlielumus var lietot šādas sakarības:

Vienā virzienā stiegtas plastmasas elastīgo raksturlielumu aprēķins [2,14]



1. attēls. *Schematisks stiegtas plastmasas loksnes attēls.*

Aprēķina stiegtuma relatīvo daudzumu:

$$k = \frac{F_{stiegras}}{F_{kopejais}}, \quad (1)$$

kur $F_{stiegras}$, $F_{kopejais}$ – stiegru šķērsriezuma laukums un kopējais šķērsriezuma laukums.

$$E_1 = \frac{1}{s_{11}} = (1-k)E_A + kE_B, \quad (2)$$

$$E_2 = E_3 = \frac{1}{s_{22}} = \frac{1}{s_{33}} = \frac{(1-\sqrt{k})E_B + \sqrt{k}E_A}{E_A(E_B(1-\sqrt{k}+k) + E_A(\sqrt{k}-k))} - \frac{(v_A E_B - v_B E_A)^2 (1-k)k}{E_A E_B (kE_B + (1-k)E_A)} \quad (3)$$

$$v_{21} = (1-k) \cdot v_A + k \cdot v_B, \quad (4)$$

$$v_{12} = \frac{E_2 v_{21}}{E_1}, \quad (5)$$

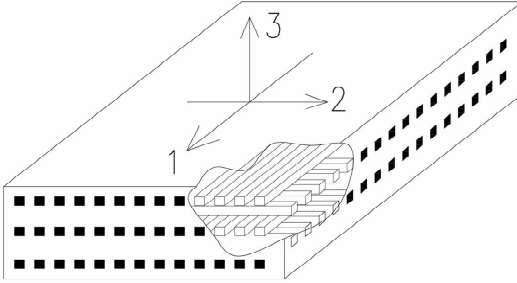
$$\frac{1}{G_{23}} = s_{44} = \frac{1-\sqrt{k}}{G_A} + \sqrt{k} \left(\frac{(1-\sqrt{k})^2}{G_A} + \frac{\sqrt{k}-k}{G_B} + \frac{\sqrt{k}}{(1-\sqrt{k})G_A + \sqrt{k}G_B} \right) \quad (6)$$

$$\frac{1}{G_{13}} = \frac{1}{G_{12}} = s_{55} = s_{66} = \frac{(1-\sqrt{k}+k) + (\sqrt{k}-k) \frac{G_B}{G_A}}{\left((1-\sqrt{k}) + \sqrt{k} \frac{G_B}{G_A} \right) G_A} \quad (7)$$

kur E_A, E_B – saistvielas un stiegru elastības moduļi, v_A, v_B – saistvielas un stiegru puasona koeficienti, G_A, G_B – bīdes moduļi saistvielai un

stiegrām. Indeksus nenorāda, jo šie materiāli uzskatāmi par izotropiem un elastīgie raksturlielumi visās plaknēs ir vienādi.

Divos perpendikulāros virzienos stiegotas plastmasas elastīgo raksturlielumu aprēķins [2,14]



2. attēls. *Schematic diagram of a reinforced plastic sheet.*

Lai sarēķinātu divos virzienos stiegrotā plastmasa elastīgos raksturlielumus, pieņem, ka vairākiem slāņiem, katrs slānis ir uzskatāms par vienā virzienā stiegotu plastmasu. Apzīmējot tos slāņus, kas orientēti ass 1 virzienā ar a , bet tos kas ass 2 virzienā ar b , iegūstam šādas sakarības:

$$s_{11} = \frac{1}{E_1} = \frac{s_{a11}(s_{b11}k_2 - s_{b12}k_3) + s_{a12}(s_{b12}k_1 - s_{b11}k_3)}{(1-m)(k_1k_2 - k_3^2)}, \quad (8)$$

$$s_{22} = \frac{1}{E_2} = \frac{s_{a22}(s_{b22}k_1 - s_{b12}k_3) + s_{a12}(s_{b12}k_2 - s_{b22}k_3)}{(1-m)(k_1k_2 - k_3^2)}, \quad (9)$$

$$s_{33} = \frac{1}{E_3} = \frac{k_4(k_2k_5 - k_3k_7) + k_6(k_1k_7 - k_3k_5) + k_8(k_1k_2 - k_3^2)}{k_1k_2 - k_3^2}, \quad (10)$$

$$v_{12} = -\frac{s_{a12}(s_{b11}k_2 - s_{b12}k_3) + s_{a22}(s_{b12}k_1 - s_{b11}k_3)}{s_{a22}(s_{b22}k_1 - s_{b12}k_3) + s_{a12}(s_{b12}k_2 - s_{b22}k_3)}, \quad (11)$$

$$v_{21} = \frac{E_1 v_{12}}{E_2}, \quad (12)$$

$$v_{31} = \frac{((1-m)s_{b31}(k_1k_2 - k_3^2) + m(s_{a31} - s_{b31})(s_{b11}k_2 - s_{b12}k_3) + m(s_{a32} - s_{b32})(s_{b12}k_1 - s_{b11}k_3))}{s_{a11}(s_{b11}k_2 - s_{b12}k_3) + s_{a12}(s_{b12}k_1 - s_{b11}k_3)} \quad (13)$$

$$v_{13} = \frac{E_3 v_{31}}{E_1}, \quad (14)$$

$$v_{32} = \frac{((1-m)s_{b32}(k_1k_2 - k_3^2) + m(s_{a32} - s_{b32})(s_{b22}k_1 - s_{b12}k_3) + m(s_{a31} - s_{b31})(s_{b12}k_2 - s_{b22}k_3))}{s_{a22}(s_{b22}k_1 - s_{b12}k_3) + s_{a12}(s_{b12}k_2 - s_{b22}k_3)} \quad (15)$$

$$v_{23} = \frac{E_3 v_{32}}{E_2}, \quad (16)$$

$$G_{23} = \frac{1}{ms_{a44} + (1-m)s_{b44}}, \quad (17)$$

$$G_{13} = \frac{1}{ms_{a55} + (1-m)s_{b55}}, \quad (18)$$

$$G_{12} = \frac{s_{a66}s_{b66}}{ms_{m66} + (1-m)s_{a66}}, \quad (19)$$

kur $m = \frac{F_a}{F}$; F_a – kopējais šķērsgriezuma laukums tiem slāņiem, kuriem šķiedras orientētas ass 1 virzienā; F – kopējais šķērsgriezuma laukums; s_{aij}, s_{bij} – padevīguma matricas koeficienti slāņiem, kam stiegras orientētas ass 1 virzienā un slāņiem, kam stiegras orientētas ass 2 virzienā (nosaka izmantojot formulas (2)-(7)); $k_1 = s_{a11} + \frac{m}{(1-m)}s_{b11}$

$$k_2 = s_{a22} + \frac{m}{(1-m)}s_{b22}; \quad k_3 = s_{a12} + \frac{m}{(1-m)}s_{b12}; \quad k_4 = m(s_{a13} + s_{b13});$$

$$k_5 = s_{b13} - s_{a13}; \quad k_6 = m(s_{a23} + s_{b23}); \quad k_7 = s_{b23} - s_{a23};$$

$$k_8 = ms_{a33} + (1-m)s_{b33}.$$

4. PIELIKUMS

Daži matricu algebras elementi

1) Matricu saskaitīšana vai atņemšana:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

2) Matricu reizināšana:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \end{pmatrix}$$

3) Inversā matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Lielāka izmēra matricām lieto speciālus algoritmus un kurus veic dators, jo cilvēkam tie ir ļoti gari un darbietilpīgi aprēķini.

IZMANTOTĀS LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Aškenazi E. K., Ganov E. V. Konstruktijas materiālu anizotropija (kr. valodā). Rokasgrāmata. L.: Mašinstroenije, 1972, 216 lpp.
2. Clarke J.L. Structural design of polymer composites. London: E&FN SPON. 2005, 660 pp.
3. Čudinov B. S. Ūdens koksne (kr. valodā).- Novosibirsk: Nauka, 1984. - 370 lpp.
4. Decolon C. Analysis of composite structures.- London: Hermes Penton Ltd., 2002.- 336 pp.
5. Handbook of Finnish plywood. Lahti: Kirjapaino Markprint. 2002, 65 pp.
6. Heinbockel J.H. Introduction to tensor calculus and continuum mechanics. 1996, 367 pp.
7. Jones R.M. Mechanics of composite materiāls. UK: Taylor& Francis LTd., 1999.- 519 pp.
8. Mālmeisters A.K., Tamužs V.P., Teters G.A. Materiālu pretestība polimērmateriāliem. Rīga: Zinātne, 1980, 572 lpp.
9. Ozola L. Koka konstrukciju elementi / Aprēķins un konstruēšana saskaņā ar Eirokodeksiem (Eurocode 1 , Eurocode 5). Jelgava; LLU, 2008, 259 lpp.
10. Pereligin L.M., Ugolev B.N. Koksnes zinātne (kr. valodā).- Maskava: Lesnaja promislennostj 1971. -386 lpp.
11. Porteous J., Kermani A. Structural timber design to Eurocode 5. UK: Blackwell publishing. 2007, 542 pp.
12. Rocens, K.; Steiners, K. 1976. Stiffness and ductability analysis for unbalanced monoclinic composite. *Mechanic of polymer*, 1976, (6): 1030-1035.
13. Rocēns K.A. Koksnes īpašību tehnoloģiskā regulēšana (kr. valodā).- Rīga : Zinātne, 1979. -220 lpp.
14. Skudra A. M., Bulavs F. J., Rocēns K. A. Stiegrotu plastiku šļūde un statiskais nogurums (kr. valodā). Rīga: Zinātne, 1971, 238 lpp.
15. Skudra A. M., Bulavs F. J. Stiegrotu plastiku struktūras teorija (kr. valodā). Rīga: Zinātne, 1978, 192 lpp.
16. Skudra A.M, Skudra A.A. Ievads slāņaino materiālu un konstrukciju mehānikā.- Rīga: Rīgas Tehniskā universitāte, 2002.-116 lpp.
17. Sobolev J. S. Koksne kā konstrukcijas materiāls (kr. valodā). – Maskava: Lesnaja promislennostj, 1979. -246 lpp.

18. Thelanderson S., Larsen H.J. Timber Engineering. – U.S.: John Willey & Sons LTD, 2003. - 446 pp.
19. Wood Handbook: Wood as an Engineering Material. U.S.: Forest Products Laboratory, 1999. -463 pp.
20. LVS ENV 14272:2003 „Saplāksnis- Dažu mehānisko īpašību aprēķina metode”
21. Eurocode 5: Design of timber structures – Part 1-1: General- Common rules and rules for buildings
22. EN 1990: 2002. Eurocode – Basis of structural design.
23. EN 1991-1-1:2002. Eurocode 1: Actions on structures. Part 1-1: General actions – Densities, self-weight, imposed loads for building

Saturs

1. IEVADS.....	4
2. KOKSNES UZBŪVE UN TĀS STRUKTŪRAS IZMAIŅAS SLODZES IEDARBĪBĀ	4
2.1 Koksnes uzbūves pamati	4
2.2 Spiede radiālajā virzienā	6
2.3 Spiede tangenciālajā virzienā.....	8
2.4 Stiepe radiālajā un tangenciālajā virzienā	10
2.5 Spiede/Stiepe 45 grādu leņķī pret radiālo virzienu	11
3. KOKSNES MATERIĀLU UN STIEGROTU PLASTMASU DEFORMĒJAMĪBA	12
3.1 Spēki un kopspēks.....	12
3.2 Spriegumi un deformācijas. Stingrības un padevīguma raksturlielumi	14
3.3. Zāģmateriāli un vienā virzienā stiegrotas plastmasas - transversāli izotropi materiāli	19
3.4 Slāņaini materiāli un divos perpendikulāros virzienos stiegrotas plastmasas- ortotropi materiāli	20
3.5 Zāģmateriālu un līmētas koksnes deformāciju aprēķina piemēri	21
3.5.1. Stiepts koka šķautnis	21
3.5.2 Zem leņķa pret šķiedru virzienu stiepta koksnes elementa deformēšanās.....	25
4. SLĀŅAINU MATERIĀLU AR NESIMETRISKU PRET VIDUSPLAKNI STRUKTŪRU DEFORMĒJAMĪBA	33
4.1 Trīsslāņu saplākšņa loksnes vienasīga stiepe garenass virzienā.....	36
4.2. Stiegrotas plastmasas loksnes stiepe	40
4.3 Mitruma izmaiņas izsaukto spriegumu un deformāciju aprēķins.....	45
5. SLĀŅAINU KOKSNES MATERIĀLU UN DIVOS PERPENDIKULĀROS VIRZIENOS STIEGROTU PLASTMASU STIPRĪBA	49
5.1 Ortotropa materiāla stiprība patvaļīgā sloojuma virzienā	50
5.2 Divasīgs spriegumstāvoklis.....	54
5.2.1 Stiprības virsma divasīgā stiepē	55
5.2.2 Stiprības virsma divasīgā spiedē	56
5.3 Trīsasīgs spriegumstāvoklis	57
1. PIELIKUMS	60
2. PIELIKUMS	63
3. PIELIKUMS	65
4. PIELIKUMS	70
IZMANTOTĀS LITERATŪRAS SARAKSTS	71

KOKSNES MATERIĀLU UN PLASTMASU SPRIEGUMU UN DEFORMĀCIJU APRĒĶINA PAMATI

Metodiskie norādījumi